

Beiträge zur Homotopietheorie

Habilitationsschrift

vorgelegt der

Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Frankfurt/Main

von

Ewald ~~Burger~~

aus Trier

Sommersemester 1950



VON E. BURGER

(Received April 2, 1950)

(Revised May 19, 1950)

1. Einleitung

Sei K ein endlicher n -dimensionaler Komplex, G eine (diskrete) Koeffizientengruppe, $\Delta^p(K, G)$ bzw. $\nabla^p(K, G)$ die p -dimensionale Homologie- bzw. Kohomologiegruppe von K über G . Die Beziehungen zwischen der Homologie- und Kohomologietheorie von K lassen sich bekanntlich am einfachsten und elegantesten mittels der Charakterentheorie ausdrücken, nämlich

$$\Delta^p(K, G) = \text{Char } \nabla^p(K, \text{Char } G),$$

wo $\text{Char } X$ die Charakterengruppe der (diskreten oder bikompakten) Gruppe X bedeutet. Allerdings sind hiermit diese Beziehungen nicht völlig erschöpft, da immer nur die Δ -Gruppe über G mit der ∇ -Gruppe über $\text{Char } G$ verbunden wird. Z. B. erhält man den Zusammenhang der ganzzahligen Δ - und ∇ -Gruppen, welche ja doch wenigstens für einen endlichen Komplex die wichtigsten sind, erst, indem man die Beziehungen zwischen Δ - (oder ∇ -) Gruppen über verschiedenen Koeffizientenbereichen hinzunimmt.

Den Zusammenhang zwischen den ganzzahligen Δ - und ∇ -Gruppen kann man nun zwar ohne Mühe an den entsprechenden Berandungsmatrizen ablesen. Man kann ihn aber auch aus allgemeineren gruppentheoretischen Betrachtungen gewinnen, indem man die Gruppen Δ^p und ∇^p durch das Skalarprodukt zu einem Pontrjaginschen Gruppenpaar paart. Dabei zeigt es sich dann jedoch, daß man die Paarung der reduzierten Δ - und ∇ -Gruppen (Faktorgruppen nach den entsprechenden Torsionsgruppen) und die Paarung der Torsionsgruppen gesondert zu betrachten hat. Diese Unbequemlichkeit wird gerade vermieden, wenn man nicht die ganzzahligen Gruppen paart, sondern $\Delta^p(K, G)$ und $\nabla^p(K, \text{Char } G)$. Durch ein genaueres Eingehen auf die Paarung kann man jedoch auch im Falle der ganzzahligen Gruppen sofort die ganzen Gruppen vergleichen. Dies ergibt sich als Spezialfall eines Satzes von Eilenberg-MacLane [3].

Ganz analog liegen die Verhältnisse bei den Reidemeisterschen Homologiegruppen des Komplexes K (vgl. [7]). Auch hier kann man sofort aus den Berandungsmatrizen Beziehungen zwischen den Δ - und ∇ -Gruppen ablesen (bzw. Dualitätssätze für die Δ -Gruppen komplementärer Dimension in einer Mannigfaltigkeit) (Reidemeister [7], [8], Franz [5]). Allerdings lassen sie sich nur dann als konkrete Gleichungen zwischen den Gruppeninvarianten ausdrücken, wenn man sich auf solche Gruppen beschränkt, deren gruppentheoretische Struktur bekannt ist. Das ist z.B. der Fall, wenn man eine homomorphe Abbildung des Gruppenrings der Fundamentalgruppe von K auf die Hauptordnung Ω eines Zahlkörpers $\mathbb{R}$ vornimmt. Dann erhält man als Δ - und ∇ -Gruppen Operatorgruppen über derartigen Hauptordnungen Ω , deren Struktur seit Steinitz [9] bekannt ist.

Auch hier kann man die Untersuchungen wieder der Theorie der Pontrjaginischen Gruppenpaare (insbesondere der Charakterentheorie) unterordnen. Unter Verwendung der Charakterengruppen geschieht dies bei Komatu [6], unter Beschränkung auf die Gruppen über Ω , die also aus den ganzzahligen Gruppen entstanden sind, bei Burger [2]. In dieser letzten Untersuchung wird wieder der Fall der reduzierten Δ -Gruppen (Bettimodul) und der Fall der Torsionsgruppen getrennt behandelt. Durch Übertragung des Satzes von Eilenberg-MacLane auf Operatorgruppen kann diese Trennung aber umgangen werden und somit eine einheitliche Ableitung erreicht werden. Das ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Bei Eilenberg-MacLane erweist sich die Gruppe $\text{Ext}(G, H)$ der (abelschen) Gruppenerweiterungen der (abelschen) Gruppe G mit der (abelschen) Gruppe H als sehr wichtig. Im §2 der vorliegenden Arbeit wird die entsprechende Gruppe der Gruppenerweiterungen für Operatorgruppen eingeführt und in §3 dann der Satz von Eilenberg-MacLane auf Δ - und ∇ -Gruppen über Hauptordnungen Ω übertragen.

2. Erweiterungen von Operatorgruppen

Es sei G eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe mit dem Operatorenbereich Ω (Ω -Modul). Ω sei ein Ring mit Einselement. Für irgendwelche $g \in G$, $\omega \in \Omega$ ist also das Produkt $\omega g \in G$ erklärt, und es gelten die Regeln

$$(1) \quad \omega(g_1 + g_2) = \omega g_1 + \omega g_2$$

$$(2) \quad (\omega_1 + \omega_2)g = \omega_1 g + \omega_2 g$$

$$(3) \quad (\omega_1 \omega_2)g = \omega_1(\omega_2 g),$$

$$(4) \quad 1g = g.$$

Sei H ebenfalls eine abelsche Operatorgruppe über Ω . Unter einer Erweiterung von G mit H verstehen wir ein Paar (E, χ) . Hierbei ist E eine abelsche Operatorgruppe über Ω , die G als zulässige Untergruppe enthält, derart dass E/G operatorisomorph zu H ist, und χ ist ein Operatorhomomorphismus von E auf H mit dem Kern G .¹

Sei (E, χ) eine Erweiterung von G mit H . In der üblichen Weise wählen wir ein Repräsentantensystem für die Restklassen von E mod G , indem wir zu jedem Element $h \in H$ ein festes Element $e(h) \in E$ auswählen, derart dass

$$(5) \quad \chi(e(h)) = h; \quad e(0) = 0$$

ist. Es gelten dann Gleichungen

$$(6) \quad e(h_1) + e(h_2) = f(h_1, h_2) + e(h_1 + h_2),$$

$$(7) \quad \omega e(h) = g(\omega, h) + e(\omega h)$$

mit $f(h_1, h_2) \in G$, $g(\omega, h) \in G$. Dabei ist

$$f(h_1, h_2) = f(h_2, h_1); \quad f(h, 0) = 0; \quad g(\omega, 0) = 0.$$

¹ Dass wir auch den Homomorphismus χ als Bestimmungsstück der Erweiterung verwenden, ist für die spätere Äquivalenzdefinition wesentlich. Nur so kommt man zu einer Gruppe der Erweiterungen (vgl. hierzu für gewöhnliche Gruppen Baer [1]).

Wir erhalten also jetzt ausser dem gewöhnlichen Faktorsystem $f(h_1, h_2)$, das die Addition der Repräsentanten regelt, noch ein zweites "Faktorsystem" $g(\omega, h)$, das die Anwendung der Operatoren ω auf die Repräsentanten beschreibt.

Aus dem Assoziativgesetz in E folgen zunächst wie gewöhnlich die Assoziativitätsrelationen für das Faktorsystem $f(h_1, h_2)$, nämlich

$$(8) \quad f(h_1, h_2) + f(h_1 + h_2, h_3) = f(h_2, h_3) + f(h_1, h_2 + h_3).$$

Ferner folgen aus den Operatorregeln (1)–(4) für das System $g(\omega, h)$ unmittelbar die Formeln

$$(9) \quad f(\omega h_1, \omega h_2) - \omega f(h_1, h_2) = g(\omega, h_1 + h_2) - g(\omega, h_1) - g(\omega, h_2),$$

$$(10) \quad f(\omega_1 h, \omega_2 h) = g(\omega_1 + \omega_2, h) - g(\omega_1, h) - g(\omega_2, h)$$

$$(11) \quad g(\omega_1 \omega_2, h) = g(\omega_1, \omega_2 h) + \omega_1 g(\omega_2, h),$$

$$(12) \quad g(1, h) = 0.$$

Wir nennen ein Paar von Funktionen $f(h_1, h_2)$, $g(\omega, h)$ mit Funktionswerten in G und $f(h_1, h_2) = f(h_2, h_1)$, $f(h, 0) = g(\omega, 0) = 0$, das die Bedingungen (8)–(12) erfüllt, ein "Paar von Faktorsystemen" $\{f, g\}$.

Geht man von einem anderen Repräsentantensystem

$$e_1(h) = e(h) + t(h) \quad t(h) \in G, t(0) = 0$$

aus, so ersetzt sich bekanntlich das Faktorsystem $f(h_1, h_2)$ durch das assoziierte System

$$f(h_1, h_2) + t(h_1) + t(h_2) - t(h_1 + h_2).$$

Ebenso berechnet man sofort, daß sich das System $g(\omega, h)$ durch

$$g(\omega, h) + \omega t(h) - t(\omega h)$$

ersetzt. Wir nennen das Paar von Faktorsystemen $\{f, g\}$ ebenfalls assoziiert zum Paar $\{f(h_1, h_2) + t(h_1) + t(h_2) - t(h_1 + h_2), g(\omega, h) + \omega t(h) - t(\omega h)\}$. Die Gesamtheit aller Paare $\{f, g\}$ von Faktorsystemen zerfällt offenbar in Klassen untereinander assoziierter. Man erkennt auch sofort, daß mit jedem Paar von Faktorsystemen $\{f, g\}$ durch geeignete Repräsentantenwahl jedes zu $\{f, g\}$ assoziierte Paar erhalten werden kann.

Nun wird auch für die Erweiterungen von G mit H eine Klasseneinteilung definiert, indem zwei Erweiterungen (E, χ) und (E_1, χ_1) äquivalent oder vom gleichen Typ genannt werden, wenn es einen Operatorisomorphismus Φ von E auf E_1 derart gibt, dass

$$(13) \quad \Phi(g) = g \quad \text{für alle } g \in G$$

$$(13a) \quad \chi_1 \Phi(e) = \chi e \quad \text{für alle } e \in E$$

gilt.²

² Bei dieser Äquivalenzdefinition repräsentiert also eventuell dieselbe Erweiterungsgruppe zwei verschiedene Typen, wenn ihre Faktorgruppe E/G in zweierlei Weise auf H bezogen wird.

Offenbar bestimmt jede Klasse äquivalenter Erweiterungen eindeutig eine Klasse assoziierter Paare von Faktorsystemen.

Umgekehrt gehört zu jedem Paar von Faktorsystemen $\{f, g\}$ eine Erweiterung von G mit H , die bezüglich geeigneter Restklassenrepräsentanten dieses Paar von Faktorsystemen hat. Das beweist man wie bei gewöhnlichen Gruppen durch Konstruktion einer zugehörigen Erweiterung: Die Gruppe E besteht aus allen Elementenpaaren $[g, h]$, wobei $g \in G$, $h \in H$ ist, mit der Additionsvorschrift

$$[g_1, h_1] + [g_2, h_2] = [g_1 + g_2 + f(h_1, h_2), h_1 + h_2]$$

und der Operatorvorschrift

$$\omega[g, h] = [\omega g + g(\omega, h), \omega h].$$

Schliesslich sind offenbar zwei Erweiterungen (E, χ) und (E_1, χ_1) , die bezüglich irgendwelcher Repräsentantensysteme assoziierte Paare von Faktorsystemen haben, äquivalent.

Also besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Typen von Erweiterungen von G mit H und den Klassen assoziierter Paare von Faktorsystemen $\{f, g\}$.

Im Falle einer gewöhnlichen abelschen Gruppe G ist Ω der Ring der ganzen Zahlen und ωg bedeutet das natürliche ω -fache von g . In diesem Falle besitzt offenbar jedes gewöhnliche Faktorsystem $f(h_1, h_2)$ einen und nur einen Partner $g(\omega, h)$, der es zu einem Paar von Faktorsystemen ergänzt. Man kann sich daher hier bekanntlich auf $f(h_1, h_2)$ allein beschränken. Das ist für einen allgemeinen Operatorenring Ω natürlich nicht mehr der Fall. Zunächst braucht nicht jedes gewöhnliche Faktorsystem $f(h_1, h_2)$ einen Partner $g(\omega, h)$ zu besitzen, der es zu einem Paar von Faktorsystemen ergänzt. Aber es kann auch mehrere solche Partner besitzen. Wenn nämlich $\{f, g\}$ ein Paar von Faktorsystemen ist, so ist $\{f, g + \varphi(\omega, h)\}$ dann und nur dann ebenfalls ein Paar von Faktorsystemen, wenn die Funktion $\varphi(\omega, h)$ den folgenden Bedingungen genügt:

$$(14) \quad \varphi(\omega, h_1) + \varphi(\omega, h_2) - \varphi(\omega, h_1 + h_2) = 0,$$

$$(15) \quad \varphi(\omega_1, h) + \varphi(\omega_2, h) - \varphi(\omega_1 + \omega_2, h) = 0,$$

$$(16) \quad \varphi(\omega_1 \omega_2, h) = \varphi(\omega_1, \omega_2 h) + \omega_1 \varphi(\omega_2, h),$$

$$(17) \quad \varphi(1, h) = 0,$$

d.h. $\varphi(\omega, h)$ ist für jedes feste ω ein Homomorphismus φ_ω von H in G , die Zuordnung $\omega \rightarrow \varphi_\omega$ ist ein Homomorphismus Φ der additiven Gruppe des Ringes Ω in die additive Gruppe $\text{Hom}(H, G)$ der Homomorphismen von H in G , der mit der Multiplikation in Ω gemäss (16) verknüpft ist und bei dem der Primring von Ω annulliert wird.

Dabei ist das Paar $\{f, g\}$ zum Paar $\{f, g + \varphi\}$ dann und nur dann assoziiert, wenn

$$(18) \quad \varphi(\omega, h) = \omega t(h) - t(\omega h)$$

ist, wobei $t(h)$ ein Homomorphismus von H in G ist.

Falls Ω der Ring der ganzen Zahlen ist, gibt es offenbar keinen Homomorphismus $\Phi \neq 0$, der den Bedingungen (14)–(17) genügt. Aber für andere Ringe Ω kann es solche Homomorphismen Φ geben, und zwar solche, die nicht von der trivialen Form (18) sind, wie man an einfachen Beispielen sieht. Sei z.B. Ω der Ring der Zahlen $m + n\gamma$ mit ganzzahligen n , m und der Multiplikationsvorschrift $\gamma^2 = 1$. Für H und G nehmen wir zyklische Gruppen der Ordnung 2,

$$H = \{h\}, \quad G = \{g\},$$

die gemäss der Vorschrift

$$(19) \quad (m + n\gamma)(h) = (m + n)h; \quad (m + n\gamma)g = (m + n)g$$

als Operatorgruppen über Ω aufgefasst werden. Dann ist offenbar $\text{Hom}(H, G)$ ebenfalls zyklisch von der Ordnung 2, wobei das erzeugende Element von $\text{Hom}(H, G)$ der Homomorphismus φ von H in G ist, der h in g überführt,

$$\text{Hom}(H, G) = \{\varphi\}; \quad \varphi(h) = g.$$

Dann genügt die Zuordnung

$$\Phi(m + n\gamma) = n\varphi$$

allen Anforderungen (14)–(17). Z.B. ist

$$\begin{aligned} [\Phi((m + n\gamma)(m' + n'\gamma))](h) &= [\Phi(mm' + nn' + (mn' + nm')\gamma)](h) \\ &= (mn' + nm')\varphi(h) = (mn' + nm')g \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} [\Phi(m + n\gamma)]((m' + n'\gamma)h) &+ (m + n\gamma)[\Phi(m + n'\gamma)](h) \\ &= n\varphi[(m' + n'\gamma)h] + (m + n\gamma)[n'\varphi(h)] \\ &= n(m' + n')g + (m + n)n'g = (nm' + mn' + 2nn')g \\ &= (nm' + mn')g. \end{aligned}$$

Ferner ist Φ offenbar nicht von der Form (18).

Dieses Beispiel hat eine sehr einfache gruppentheoretische Bedeutung. Es besagt nämlich, daß man die direkte Summe zweier zyklischer Gruppen G und H von der Ordnung 2 in zweifacher Weise so als Operatorgruppe über dem Ring Ω auffassen kann, daß sie Erweiterung von G mit H ist, wobei G und H als Operatorgruppen über Ω gemäss (19) aufgefasst sind. Bei der einen Auffassung ist γ der identische Automorphismus von $G + H$, bei der anderen ist

$$\gamma[\lambda g + \mu h] = (\lambda + \mu)g + \mu h \quad \lambda, \mu \text{ ganz.}$$

Da das System der Bedingungen (14)–(18) das Faktorsystem $f(h_1, h_2)$ nicht mehr enthält, so folgt, daß irgendzwei gewöhnliche Erweiterungen von G mit H , die sich überhaupt als Operatorerweiterungen auffassen lassen, sich in gleich

viel Weisen als Operatorerweiterungen auffassen lassen. Mit anderen Worten: Gewisse der gewöhnlichen Erweiterungstypen von G mit H zerfallen in mehrere Operortypen, und zwar jeweils in gleich viele. Dabei sind diejenigen gewöhnlichen Erweiterungstypen, die überhaupt Operortypen enthalten, dadurch gekennzeichnet, dass sich zu ihrem Faktorsystem $f(h_1, h_2)$ ein Partner $g(\omega, h)$ gemäss den Bedingungen (9)–(12) finden lässt.³ Beispielsweise gibt es in dem eben betrachteten Beispiel zwei gewöhnliche Erweiterungstypen, nämlich die direkte Summe zweier zyklischen Gruppen der Ordnung 2 und die zyklische Gruppe der Ordnung 4. Jeder dieser Typen zerfällt in zwei Operortypen.

Man kann nun genau wie im Falle der gewöhnlichen Gruppen aus den Erweiterungstypen selbst eine Gruppe $\text{Ext}(G, H)$ bilden. Hierzu braucht man nur zu beachten, dass mit zwei Paaren $\{f, g\}$ und $\{f', g'\}$ auch das Paar $\{f - f', g - g'\}$ ein Paar von Faktorsystemen ist, das bei Ersetzung von $\{f, g\}$ und $\{f', g'\}$ durch assoziierte Paare selbst durch ein assoziiertes Paar ersetzt wird. Das folgt sofort aus der Linearität der Gleichungen (8)–(12).

Die Gruppe $\text{Ext}(G, H)$ ist die Gruppe der Klassen assoziierter Paare von Faktorsystemen $\{f, g\}$ bei der Addition. Nullelement ist die Klasse des Paares $f = g = 0$, d.h. der Erweiterungstyp der direkten Summe $G + H$ der Operatorgruppen G und H .⁴

Von besonderer Wichtigkeit für die Anwendung, die wir im Auge haben, ist nun die folgende Darstellung der Gruppe $\text{Ext}(G, H)$ (vgl. Eilenberg-Mac Lane [3]). Jede Operatorgruppe H lässt sich operatorisomorph darstellen als Faktorgruppe einer freien Gruppe F über Ω nach einer Relationengruppe R ,

$$H \cong F/R.$$

Es bezeichne $\text{Ophom}(R, G)$ die additive Gruppe der Operatorhomomorphismen von R in G , $\text{Ophom}(R, G; F)$ die Untergruppe derjenigen Operatorhomomorphismen von R in G , die sich zu Operatorhomomorphismen von F in G erweitern lassen. Dann gilt

$$(20) \quad \text{Ext}(G, H) \cong \text{Ophom}(R, G)/\text{Ophom}(R, G; F).$$

Der Beweis dieser Behauptung ist vollkommen analog zu dem entsprechenden Beweis von Eilenberg-Mac Lane [3]. Man hat nur überall die Faktorsysteme durch Paare von Faktorsystemen, die Homomorphismen durch Operatorhomomorphismen zu ersetzen.

Die Gruppe $\text{Ext}(G, H)$ ist zunächst keine Operatorgruppe über Ω , sondern eine gewöhnliche Gruppe. In zwei wichtigen Spezialfällen jedoch kann man sie auch als Operatorgruppe über Ω auffassen. Ist nämlich erstens Ω kommutativ, so

³ Man sieht sofort, daß man genau dann zu einem $f(h_1, h_2)$ einen Partner $g(\omega, h)$ finden kann, wenn man zu einem mit f assoziierten f' einen Partner g' finden kann.

⁴ Man kann auch die Addition statt mit den Faktorsystemen mit den Erweiterungstypen selbst ausführen (vgl. Baer [1]).

erkennt man sofort, daß mit $\{f, g\}$ auch $\{\omega f, \omega g\}$ ein Paar von Faktorsystemen ist und daß durch die Definition

$$(21) \quad \omega\{f, g\} = \{\omega f, \omega g\}$$

die additive Gruppe der Klassen assoziierter Paare von Faktorsystemen, d.h. die Gruppe $\text{Ext}(G, H)$ eine Operatorgruppe über Ω wird. Ebenso kann man in diesem Falle auch die Gruppe $\text{Ophom}(R, G)$ zu einer Operatorgruppe über Ω machen, indem man für alle $\Phi \in \text{Ophom}(R, G)$, $r \in R$, $\omega \in \Omega$

$$(22) \quad (\omega\Phi)(r) = \omega(\Phi(r))$$

setzt. Dann gilt die Darstellung (20) als Operatorisomorphie über Ω .

Der zweite Fall ist der, daß G ein Ω -Doppelmodul ist. Das bedeutet, daß ausser der ersten (vorderen) Multiplikation ωg der Operatoren $\omega \in \Omega$ mit den Elementen $g \in G$ noch eine zweite (hintere) Operationsweise von ω auf G erklärt ist, die mit der ersten vertauschbar ist. Es sind also auch die Produkte $g\omega$ erklärt, und es gelten die Regeln

$$(g_1 + g_2)\omega = g_1\omega + g_2\omega, \quad g(\omega_1 + \omega_2) = g\omega_1 + g\omega_2,$$

$$g(\omega_1\omega_2) = (g\omega_1)\omega_2, \quad g1 = g$$

$$(23) \quad (\omega_1 g)\omega_2 = \omega_1(g\omega_2).$$

Auf Grund der Vertauschungsregel (23) folgt wieder sofort, daß mit $\{f(h_1, h_2), g(\omega, h)\}$ für jedes feste $\omega_1 \in \Omega$ auch $\{f(h_1, h_2)\omega_1, g(\omega, h)\omega_1\}$ ein Paar von Faktorsystemen ist und daß durch diese Operationsweise $\text{Ext}(G, H)$ Operatorgruppe über Ω wird. Ebenso wird $\text{Ophom}(R, G)$ Operatorgruppe über Ω durch die Definition

$$(\Phi\omega)(r) = \Phi(r)\omega \quad \Phi \in \text{Ophom}(R, G), r \in R, \omega \in \Omega$$

und die Darstellung (20) ist eine Operatorisomorphie über Ω .

Wir betrachten noch das folgende Beispiel, das wir später brauchen werden. Sei Ω die Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers $\mathbb{K}$. Wir setzen $G = \Omega$, indem wir Ω in natürlicher Weise als (freie) Operatorgruppe über Ω auffassen. H sei irgendeine abelsche Gruppe über Ω mit endlich vielen Erzeugenden. Wir wollen die Gruppe $\text{Ext}(\Omega, H)$ berechnen, wobei wir sie gemäß (21) als Operatorgruppe über Ω auffassen. Die Struktur der Gruppen H ist bekannt (Steinitz [9]): H ist direkte Summe einer Operatorgruppe, deren sämtliche Elemente $\neq 0$ die Ordnung (0) haben, und einer endlichen Operatorgruppe. Jede endliche Operatorgruppe über Ω ist direkte Summe zyklischer Gruppen über Ω mit von Null verschiedenen Ordnungen.⁵ Nun folgt aus der Darstellung (20) unmittelbar, daß, wenn die Gruppe H direkte Summe mehrerer Gruppen H_i ($i = 1, \dots, n$) ist, sich $\text{Ext}(G, H)$ in entsprechender Weise in die direkten Summanden $\text{Ext}(G, H_i)$

⁵ Fordert man noch, daß sich die Ordnungen dieser zyklischen Summanden sukzessive teilen, so sind diese Ordnungen eindeutig bestimmt und heissen die Elementarteilerideale der endlichen Gruppe.

zerlegt. Daher brauchen wir hier nur die Fälle $\text{Ext}(G, H)$ zu untersuchen, wo H eine Gruppe ohne Elemente endlicher Ordnung oder eine zyklische Gruppe mit einer Ordnung $\neq (0)$ ist.

Eine Operatorgruppe H_0 über Ω , deren sämtliche Elemente $\neq 0$ die Ordnung (0) haben, braucht nun zwar keine freie Gruppe zu sein, aber sie ist jedenfalls direkter Summand in einer freien Gruppe (vgl. Steinitz [9] II, S.326,327) etwa $F = H_0 + H_1$, wo F frei ist. Dann ist aber wieder

$$\text{Ext}(\Omega, F) = \text{Ext}(\Omega, H_0) + \text{Ext}(\Omega, H_1).$$

Nun ist aber für eine freie Gruppe $\text{Ext}(\Omega, F) = 0$, was man genau so wie im Falle gewöhnlicher abelscher Gruppen einsieht oder auch direkt aus (20) entnimmt. Daher ist auch $\text{Ext}(\Omega, H_0) = 0$.

Sei T eine zyklische Gruppe von der Ordnung $a \neq (0)$ über Ω . Dann kann man T darstellen als

$$T = \Omega/a.$$

Mit dieser Darstellung erhält man dann aus (20)

$$(24) \quad \text{Ext}(\Omega, T) \cong \text{Ophom}(a, \Omega)/\text{Ophom}(a, \Omega; \Omega).$$

Nun sieht man leicht, daß jeder Operatorhomomorphismus von a in Ω bewirkt wird durch Multiplikation der Elemente von a mit einer geeigneten Zahl $\lambda \in \mathfrak{R}$, die der Bedingung genügt, daß λa wieder ein ganzes Ideal ist (d.h. durch Multiplikation mit den Elementen $\lambda \in a^{-1}$). Andererseits werden die Operatorhomomorphismen von Ω in Ω bewirkt durch Multiplikation mit Elementen $\omega \in \Omega$. Für eine Zahl $\lambda \in \mathfrak{R}$ ist nun offenbar λa dann und nur dann ganz, wenn sich λ als Idealbruch $\mathfrak{f}/a$ schreiben läßt. Wir wählen ein festes (ganzes) Ideal $c \neq (0)$ aus der zu a reziproken Klasse und eine feste Erzeugende des Hauptideals ac . Dann haben wir für λ alle Zahlen ω/ac mit $\omega \equiv 0 \pmod{c}$ zuzulassen. Andererseits wird ω/ac genau dann ganz, wenn $\omega \equiv 0 \pmod{ac}$ ist. Also wird die rechte Seite von (24) einfach die Faktorgruppe c/ac . Diese Gruppe ist zyklisch; denn c läßt sich bekanntlich durch zwei Elemente erzeugen, von denen eines noch willkürlich (nur $\neq 0$) wählbar ist. Wählen wir es aus ac , so sieht man, dass c/ac von einem Element erzeugt wird. Weiter besteht die Ordnung von c/ac genau aus denjenigen $\omega \in \Omega$, für die $\omega c \equiv 0 \pmod{ac}$, d.h. $\omega \equiv 0 \pmod{a}$ gilt. Die Ordnung von c/ac ist also gerade a und daher $c/ac \cong \Omega/a$, also

$$\text{Ext}(\Omega, T) \cong T.$$

3. Die Reidemeisterschen Homologiegruppen

Sei K ein endlicher Komplex. Die Reidemeisterschen Homologiegruppen von K sind dann ein Spezialfall der folgenden Konstruktion: Sei Ω ein Ring mit Einselement, in dem ein Antiisomorphismus $\omega \rightarrow \bar{\omega}$ von der Periode zwei erklärt ist:

$$\overline{\omega_1 + \omega_2} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \quad \overline{\omega_1 \omega_2} = \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_1, \quad \bar{\bar{\omega}} = \omega.$$

Für die p -dimensionalen ($p = 1, \dots, n$) Kettengruppen $L^p = L^p(K, \Omega)$ von K über Ω sei ein Randoperator Δ bzw. Korandoperator ∇ definiert durch

$$\begin{aligned}\Delta \sum \omega_i c_i^p &= \sum \omega_i \varepsilon_{ik}^p c_k^{p-1}, \\ \nabla \sum \omega_i c_i^{p-1} &= \sum \omega_i \bar{\varepsilon}_{ik}^p c_k^p,\end{aligned}\quad \varepsilon_{ik}^p \in \Omega$$

wobei c_i^p die p -dimensionalen Zellen von K durchläuft und $\Delta\Delta = 0$, $\nabla\nabla = 0$ ist. Hieraus werden Zyklen-(Kozyklen-)Gruppe $Z_\Delta^p(Z_\nabla^p)$, Ränder-(Koränder-) Gruppe $B_\Delta^p(B_\nabla^p)$ und Homologie-(Kohomologie-)Gruppe $\Delta^p(\nabla^p)$ von K in bekannter Weise definiert. Sie sind alle Operatorgruppen über Ω .

Für L^p wird ein Skalarprodukt erklärt gemäss

$$(1) \quad \sum \omega_i^{(1)} c_i^p \cdot \sum \omega_i^{(2)} c_i^p = \sum \omega_i^{(1)} \overline{\omega_i^{(2)}} \in \Omega$$

Man rechnet sofort nach, daß für alle $\xi^p \in L^p$, $\xi^{p-1} \in L^{p-1}$

$$(2) \quad \Delta \xi^p \cdot \xi^{p-1} = \xi^p \cdot \nabla \xi^{p-1}$$

ist.

Wir machen nun noch die für das Folgende wichtige Voraussetzung $\mathfrak{B}$: Z_Δ^p ist direkter Summand von L^p ($p = 1, \dots, n$).

Dann gilt der Satz 1. Unter der Voraussetzung $\mathfrak{B}$ gilt die Operatorisomorphie

$$(3) \quad \nabla^p \cong \text{Ophom}(\Delta^p, \Omega) + \text{Ext}(\Omega, \Delta^{p-1}).$$

Hierbei sind die Operatoren $\omega \in \Omega$ für die Gruppe $\text{Ophom}(\Delta^p, \Omega)$ durch

$$(\omega\varphi)(h^p) = \varphi(h^p)\bar{\omega} \quad \varphi \in \text{Ophom}(\Delta^p, \Omega), h^p \in \Delta^p, \omega \in \Omega$$

zu erklären und die Operatoren für $\text{Ext}(\Omega, \Delta^{p-1})$ entsprechend durch

$$\omega\{f, g\} = \{f\bar{\omega}, g\bar{\omega}\}$$

für die Paare von Faktorsystemen $\{f, g\}$.

Der Beweis dieses Satzes ist im Wesentlichen eine Wiederholung des entsprechenden Beweises von Eilenberg-MacLane [3]. Lediglich der Umstand, daß bei Operatorgruppen nicht mehr jede Untergruppe einer freien Gruppe frei ist, bedingt einige Änderungen. Hiermit hängt auch die zusätzliche Voraussetzung $\mathfrak{B}$ zusammen.

Zunächst erschließt man aus der Existenz des Skalarproduktes (1) ebenso wie bei Eilenberg-MacLane die Isomorphie $L^p \cong \text{Ophom}(L^p, \Omega)$, die sogar als Operatorisomorphie gilt, wenn die Operatoren $\omega \in \Omega$ für die Gruppe $\text{Ophom}(L^p, \Omega)$ durch

$$(4) \quad (\omega\varphi)(\xi^p) = \varphi(\xi^p)\bar{\omega} \quad \varphi \in \text{Ophom}(L^p, \Omega), \xi^p \in L^p, \omega \in \Omega$$

erklärt werden.

Hieraus folgt ebenfalls wie bei Eilenberg-MacLane die Operatorisomorphie $Z_\nabla^p/A^p \cong \text{Ophom}(\Delta^p, \Omega)$, wobei A^p die Untergruppe derjenigen Kozyklen aus Z_∇^p bedeutet, die (im Skalarprodukt (1)) alle Δ -Zyklen annullieren. Die zum

Beweis dieser Behauptung benötigte Tatsache, daß Z_{Δ}^p direkter Summand von L^p ist, lässt sich hier allerdings nicht beweisen, sondern wird in der Voraussetzung $\mathfrak{B}$ gefordert.

Ebenfalls wegen der Voraussetzung $\mathfrak{B}$ gilt dann die Operatorisomorphie $\nabla^p \cong Z_{\nabla}^p/A^p + A^p/B_{\nabla}^p$, wobei die Summe direkt ist. Die Bestimmung des zweiten Summanden A^p/B_{∇}^p lässt sich ebenfalls wie bei Eilenberg-MacLane durchführen. Man erhält zunächst

$$A^p/B_{\nabla}^p \cong \text{Ophom}(B_{\Delta}^{p-1}, \Omega)/\text{Ophom}(B_{\Delta}^{p-1}, \Omega; L^{p-1}).$$

Nun muss man etwas anders schliessen als bei Eilenberg-MacLane, da Z_{Δ}^{p-1} keine freie Gruppe zu sein braucht. Es ist nach (20) §2

$$A^p/B_{\nabla}^p \cong \text{Ext}(\Omega, L^{p-1}/B_{\Delta}^{p-1}).$$

Da Z_{Δ}^{p-1} nach Voraussetzung $\mathfrak{B}$ direkter Summand von L^{p-1} ist, also auch $\Delta^{p-1} = Z_{\Delta}^{p-1}/B_{\Delta}^{p-1}$ direkter Summand von L^{p-1}/B_{Δ}^{p-1} , so folgt die direkte Zerlegung

$$\text{Ext}(\Omega, L^{p-1}/B_{\Delta}^{p-1}) \cong \text{Ext}(\Omega, \Delta^{p-1}) + \text{Ext}(\Omega, L^{p-1}/Z_{\Delta}^{p-1}).$$

Nun ist aber L^{p-1}/Z_{Δ}^{p-1} selbst direkter Summand der freien Gruppe L^{p-1} . Da $\text{Ext}(\Omega, L^{p-1}) = 0$ ist, muss also auch $\text{Ext}(\Omega, L^{p-1}/Z_{\Delta}^{p-1}) = 0$ sein. Also folgt schliesslich

$$A^p/B_{\nabla}^p = \text{Ext}(\Omega, \Delta^{p-1}).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Die Voraussetzung $\mathfrak{B}$ ist erfüllt für den in [2] und [5] betrachteten Fall der Überdeckungen des Komplexes K mit der Hauptordnung Ω eines Zahlkörpers $\mathfrak{K}$. Dabei sei $\bar{\omega}$ konjugiertkomplex zu ω . Die Gruppe L^p hat endlich viele Erzeugende über Ω , also auch ihre Untergruppe Z_{Δ}^p . Ferner hat Z_{Δ}^p folgende Eigenschaft: Wenn eine $\mathfrak{x}^p \in L^p$ zu Z_{Δ}^p gehört und ein Multiplum $\lambda \mathfrak{x}^p$ mit $\lambda \in \mathfrak{K}$ wieder zu L^p gehört, so ist $\lambda \mathfrak{x}^p \in Z_{\Delta}^p$. Es ist also Z_{Δ}^p in der Bezeichnungsweise von Steinitz ein Grundmodul und daher direkter Summand in L^p (vgl. [9] II, S.326, Gl. (99) und (100)).

In diesem Falle können wir die Darstellung (3) noch weiter auswerten. Δ^p und Δ^{p-1} haben ebenfalls endlich viele Erzeugende über Ω und sind daher nach Steinitz direkte Summen

$$\Delta^p = \Delta_0^p + T^p; \quad \Delta^{p-1} = \Delta_0^{p-1} + T^{p-1},$$

wo Δ_0^p , Δ_0^{p-1} Gruppen sind, deren sämtliche Elemente $\neq 0$ die Ordnung (0) haben, während T^p und T^{p-1} endliche Gruppen sind. Wir nennen wieder Δ_0^p Bettimodul und T^p Torsionsgruppe. Nun gilt offenbar die direkte Zerlegung

$$\text{Ophom}(\Delta^p, \Omega) \cong \text{Ophom}(\Delta_0^p, \Omega) + \text{Ophom}(T^p, \Omega).$$

Da kein Element $\neq 0$ von Ω eine Ordnung $\neq (0)$ hat, so ist $\text{Ophom}(T^p, \Omega) = 0$.

Die Gruppe Δ_0^p besitzt als Invarianten nach Steinitz ihren Rang $r = \text{Rg}(\Delta_0^p)$ und ihre Klasse $Kl(\Delta_0^p)$ und ist isomorph zur direkten Summe

$$\Delta_0^p \cong \underbrace{\Omega + \cdots + \Omega}_{(r-1) - \text{mal}} + \alpha,$$

wo α ein beliebiges Ideal aus der Idealklasse $Kl(\Delta_0^p)$ ist (vgl. Steinitz [9] II, S.336). Natürlich ist $\text{Ophom}(\Omega, \Omega) \cong \Omega$. Weiter sahen wir in den Überlegungen am Ende des §2, dass die Operatorhomomorphismen von α in Ω umkehrbar eindeutig und additionstreu den Elementen des zu α reziproken Ideals α^{-1} zugeordnet sind. Nun ist für die Gruppe $\text{Ophom}(\alpha, \Omega)$ selbst eine Operationsweise der $\omega \in \Omega$ auf $\text{Ophom}(\alpha, \Omega)$ vorgeschrieben gemäss (4), also für alle $\varphi \in \text{Ophom}(\alpha, \Omega)$, $a \in \alpha$, $\omega \in \Omega$

$$(\omega\varphi)(a) = \bar{\omega}\varphi(a),$$

d.h. die in dieser Weise aufgefasste Operatorgruppe $\text{Ophom}(\alpha, \Omega)$ ist operatorisomorph mit dem Ideal $\bar{\alpha}^{-1}$, wobei dieses Ideal in gewöhnlicher Weise als Operatorgruppe über Ω zu betrachten ist, also

$$\text{Ophom}(\Delta_0^p, \Omega) \cong \underbrace{\Omega + \cdots + \Omega}_{(r-1) - \text{mal}} + \bar{\alpha}^{-1}.$$

D.h. $\text{Ophom}(\Delta_0^p, \Omega)$ hat denselben Rang wie Δ_0^p und die konjugiertreziproke Klasse. Wir bezeichnen diese Gruppe $\text{Ophom}(\Delta_0^p, \Omega)$ zur Abkürzung mit $\widetilde{\Delta}_0^p$.

Die Gruppe $\text{Ext}(\Omega, \Delta^{p-1})$ haben wir schon am Schluss des §2 bestimmt. Beachten wir noch, dass die Operationsweise von $\omega \in \Omega$ auf $\text{Ext}(\Omega, \Delta^{p-1})$ durch (4) und nicht durch (21) §2 gegeben ist, so folgt die Operatorisomorphie

$$\text{Ext}(\Omega, \Delta^{p-1}) \cong \overline{T^{p-1}},$$

wobei $\overline{T^{p-1}}$ eine endliche Gruppe ist, deren Elementarteilerideale zu denen von T^{p-1} konjugiert sind.

Also haben wir

SATZ 2. Für die Homologiegruppen einer Überdeckung von K mit der Hauptordnung eines Zahlkörpers gilt die Operatorisomorphie

$$\nabla^p \cong \Delta_0^p + \overline{T^{p-1}}$$

Die Voraussetzung $\mathfrak{B}$ ist ebenfalls erfüllt für eine Überdeckung von K mit dem Gruppenring Ω einer endlichen Gruppe über dem rationalen Körper (allgemeiner: für eine Überdeckung von K mit einer halbeinfachen Algebra Ω); denn dann sind die Operatorgruppen über Ω vollständig reduzibel, d.h. direkte Summen von einfachen Gruppen (vgl. Franz [4]). In einer vollständig reduziblen Gruppe ist aber jede Untergruppe direkter Summand.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BAER R., *Erweiterungen von Gruppen und ihren Isomorphismen*, Math. Zeit., 38 (1934), 375-416.
- [2] BURGER, E., *Über Schnittzahlen von Homotopieketten*, Math. Zeit., 52 (1949), 217-255.
- [3] EILENBERG-MACLANE, *Group extensions and homology*, Ann. of Math., 43 (1942), 757-831.
- [4] FRANZ, W., *Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen*, Crelle, 173 (1935).
- [5] FRANZ, W., *Torsionsideale, Torsionsklassen und Torsion*, Crelle, 176 (1936).
- [6] KOMATU, A., *Über die Dualitätssätze der Überdeckungen*, Jap. J. Math., 13 (1936), 493-500.
- [7] REIDEMEISTER, K., *Überdeckungen von Komplexen*, Crelle, 173 (1935).
- [8] REIDEMEISTER, K., *Das Dualitätstheorem für Homotopiekettenringe*, Math. Zeit., 41 (1936), 176-183.
- [9] STEINITZ, E., *Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern I, II*, Math. Ann., 71, 328-354; 72, 297-345 (1912).



Über die Homotopietypen gewisser Polyeder.

Von

E. BURGER in Frankfurt/Main.

Einleitung.

Während die Aufzählung der Homotopietypen der asphärischen Räume, d. h. derjenigen Räume, für die alle Homotopiegruppen außer der ersten, der Fundamentalgruppe, verschwinden, durch HUREWICZ in seiner grundlegenden Arbeit [13] heute bereits zu den klassischen Resultaten der Homotopietheorie gehört, ist die entsprechende nächst einfache Frage in dieser Richtung, nämlich die Frage nach den Homotopietypen derjenigen Räume, für die außer der Fundamentalgruppe noch eine weitere Homotopiegruppe nicht verschwindet, lange Zeit unbeantwortet geblieben. Erst vor kurzer Zeit gelang hier ein wesentlicher Fortschritt. EILENBERG und MACLANE [7] entdeckten nämlich eine neue Homotopieinvariante, die für das genannte Problem wesentlich ist. Die Fragestellung, die zu dieser Invarianten führte, war folgende.

Aus der oben genannten HUREWICZschen Klassifikation der asphärischen Polyeder (nämlich vermöge ihrer Fundamentalgruppe) folgt insbesondere, daß die Fundamentalgruppe eines asphärischen Polyeders sämtliche Homologiegruppen bestimmt. Es entstand so die Aufgabe, ein rein algebraisches Verfahren zur Berechnung der Homologiegruppen aus der Fundamentalgruppe anzugeben. Diese Aufgabe wurde fast gleichzeitig von HOPF [10], EILENBERG-MACLANE [5] und ECKMANN [1] gelöst. HOPF ([9] Nachtrag) hatte schon vorher bemerkt, daß die HUREWICZschen Methoden auch noch unter der allgemeineren Voraussetzung erfolgreich bleiben, daß für das vorgelegte Polyeder $\bar{K}$ die Homotopiegruppen $\pi_i(\bar{K})$ nur für $1 < i < n$ verschwinden. Dann bestimmt wieder die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{K})$ die Homologiegruppen $H_i(\bar{K})$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$ sowie eine gewisse Faktorgruppe der n -ten Homologiegruppe $H_n(\bar{K})$. Im Anschluß an diese Untersuchungen stellten nun EILENBERG und MACLANE in [7] die Frage, ob im letzten Falle die ganze n -te Homologiegruppe $H_n(\bar{K})$ durch die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{K})$, die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(\bar{K})$ und die Operationsweise von $\pi_1(\bar{K})$ auf $\pi_n(\bar{K})$ bestimmt ist. Es zeigt sich, daß das nicht der Fall ist. Vielmehr ist hierzu eine weitere Homotopievariante von $\bar{K}$ notwendig, eben jene oben erwähnte Invariante. Sie ist eine gewisse charakteristische Kohomologiekategorie k^{n+1} aus der $(n+1)$ -ten Kohomologiegruppe $H^{n+1}(\pi_1(\bar{K}), \pi_n(\bar{K}))$ der Gruppe $\pi_1(\bar{K})$ über der Koeffizientengruppe $\pi_n(\bar{K})^1$. Diese Untersuchung von EILENBERG-MACLANE verläuft zunächst vollkommen homotopietheoretisch: Seien $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ zwei Komplexe mit der gleichen Automorphismengruppe W . Seien $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ azyklisch in den Dimensionen $1, 2, \dots, n-1$. Für diese Komplexe

¹ Über die Kohomologiegruppen von Gruppen vgl. insbesondere EILENBERG-MACLANE [6] sowie allgemein EILENBERG [4].

werden ebenfalls (kombinatorische) charakteristische Kohomologieklassen aus $H^{n+1}(W, H_n(\tilde{K}))$ bzw. $H^{n+1}(W, H_n(\tilde{K}'))$ eingeführt. Seien für $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ die n -ten Homologiegruppen H_n und die charakteristischen Kohomologieklassen (aus $H^{n+1}(W, H_n)$) einander gleich. Dann wird gezeigt, daß es Kettentransformationen (d. h. W -treue, randtreue Homomorphismen der Kettengruppen) $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ des $(n+1)$ -dimensionalen Gerüsts $\tilde{K}^{n+1}$ von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'^{n+1}$ und $k': \tilde{K}'^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1}$ gibt, so daß die zusammengesetzten Transformationen $k'k$ und kk' beide in den Dimensionen $\leq n$ zur identischen Kettentransformation kettenhomotop sind (d. h. es gibt W -treue Homomorphismen D der i -ten Kettengruppe von $\tilde{K}$ in die $(i+1)$ -te Kettengruppe von $\tilde{K}$ ($i = 0, 1, \dots, n$), so daß $\partial D = k'k - 1 - D\partial$ ist, wobei 1 die identische Kettentransformation und ∂ den Randoperator bedeutet). Kurz gesagt: $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ sind in den Dimensionen $\leq n$ vom selben „Kettenhomotopietyp“. Insbesondere sind also ihre n -ten äquivarianten Kohomologiegruppen²⁾ isomorph. Faßt man $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ als universelle Überlagerungen zweier in den Dimensionen $2, 3, \dots, n-1$ asphärischer Polyeder und W als die zugehörige Deckbewegungsgruppe auf, so werden die äquivarianten Kohomologiegruppen von $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ (bei trivialer Operationsweise von W auf die Koeffizientengruppe) die gewöhnlichen Kohomologiegruppen der Grundkomplexe. Es wird also tatsächlich die n -te Kohomologiegruppe eines in den Dimensionen $2, 3, \dots, n-1$ asphärischen Polyeders durch die Fundamentalgruppe, die n -te Homotopiegruppe und die EILENBERG-MACLANESche Invariante bestimmt.

An diese Ergebnisse über den „Kettenhomotopietyp“ schließt sich nun naturgemäß die Frage an, ob man sie nicht verwerten kann, um eine Antwort auf die oben erwähnte Frage nach den echten Homotopietypen der Polyeder $\bar{K}$ mit $\pi_i(\bar{K}) = 0$ für $i \neq 1, n$ zu erhalten. Man hat hierzu im wesentlichen nur die Kettentransformationen und -homotopien des oben genannten Satzes von EILENBERG-MACLANE durch stetige (bzw. simpliziale) Abbildungen und Homotopien zu realisieren. Die Untersuchung solcher Realisierungsfragen war aber bereits von J. H. C. WHITEHEAD in [19] in Angriff genommen worden, so daß eine Kombination seiner Methoden mit den Ergebnissen von EILENBERG-MACLANE nahe lag. In einer neueren Arbeit von MACLANE und J. H. C. WHITEHEAD [14] wird dieser Gedanke aufgenommen. MACLANE und WHITEHEAD bestimmen nämlich in [14] den 3-Typ eines beliebigen Polyeders vermittle seiner Fundamentalgruppe, zweiten Homotopiegruppe und seiner Invarianten k^3 . Die Frage nach dem 3-Typ eines beliebigen Polyeders ist im wesentlichen gleichwertig mit der Frage nach dem Homotopietyp eines Polyeders $\bar{K}$ mit $\pi_i(\bar{K}) = 0$ für $i \geq 3$, d. h. mit dem Spezialfall $n = 2$ des oben angeschnittenen Problems der Homotopietypen der Polyeder, die in den Dimensionen $\neq 1, n$ asphärisch sind. Zwei Polyeder $\bar{K}, \bar{L}$ heißen nämlich vom selben n -Typ, wenn es Abbildungen $f: K^n \rightarrow L^n$ und $g: L^n \rightarrow K^n$ der n -dimensionalen Gerüste gibt, so daß die beiden zusammengesetzten Abbildungen $fg|L^{n-1}: L^{n-1} \rightarrow L^n$ und $gf|K^{n-1}: K^{n-1} \rightarrow K^n$ beide zur Identität homotop sind³⁾.

²⁾ Vgl. hierzu ELLENBERG [3].

³⁾ Der n -Typ eines Polyeders ist eine Invariante des Homotopietyps (der gleich dem ∞ -Typ ist), also insbesondere eine topologische Invariante.

In der vorliegenden Arbeit wird die Spezialisierung $n = 2$ aufgehoben und ein neuer Beweis für die Realisierbarkeit der Kettentransformationen und -homotopien des Satzes von EILENBERG-MACLANE durch stetige Abbildungen und Homotopien gegeben. Es ergibt sich dann als Hauptergebnis, daß die Übereinstimmung in Fundamentalgruppe, n -ter Homotopiegruppe und EILENBERG-MACLANEScher Invariante für zwei Polyeder, deren sämtliche Homotopiegruppen außer der ersten und n -ten verschwinden, notwendig und hinreichend ist dafür, daß sie vom selben Homotopietyp sind⁴⁾.

Während sich der Beweis von MACLANE-WHITEHEAD bzw. der Realisierungssatz von WHITEHEAD der relativen Homotopiegruppen $\pi_i(K^i, K^{i-1})$ bedient, benutzen wir den älteren Begriff des Homotopierandes, den HOPF in der Arbeit [9] eingeführt hat. Diese Arbeit gab übrigens den Anstoß zu den ganzen oben erwähnten neueren Untersuchungen. Der Vergleich der beiden Methoden macht die Stellung des Homotopierandes innerhalb der relativen Homotopietheorie deutlich.

Im § 1 referieren wir über den genannten Satz von EILENBERG-MACLANE und die EILENBERG-MACLANESche Invariante und stellen die notwendigen Grundbegriffe zusammen. Für das rein logische Verständnis der weiteren Untersuchungen genügt die Kenntnis des Inhaltes dieses § 1 ohne weitere Kenntnis der Arbeit [7] von EILENBERG-MACLANE. Zum Verständnis der Gesamtbedeutung des Folgenden ist jedoch eine genauere Kenntnis von [7] unerlässlich. Die §§ 2 und 3 enthalten den eigentlichen Beweis der Realisierbarkeit, und zwar § 2 für die Kettentransformationen und § 3 für die Kettenhomotopien. Die benötigten Sätze über den Homotopierand werden angeführt. Der § 4 enthält einen kurzen Vergleich mit der Beweismethode von WHITEHEAD und einige Bemerkungen über die Stellung des Homotopierandes innerhalb der relativen Homotopietheorie. Für eine eingehende Darstellung der relativen Homotopietheorie vergleiche man die Arbeit [12] von HU oder die ersten Abschnitte der Arbeit [8] von FOX. Schließlich machen wir im Schlußparagraphen § 5 einige Bemerkungen über die Abbildungsklassen der Abbildungen beliebiger Polyeder in die betrachteten asphärischen Polyeder. Wir geben im Satz 3 eine gewisse Algebraisierung dieses Problems der Abbildungsklassen.

§ 1. Die EILENBERG-MAC LANESche Invariante.

Seien K und K' zwei gewöhnliche zusammenhängende Simplicialkomplexe mit isomorphen Fundamentalgruppen $\pi_1(K) \cong \pi_1(K')$. Wir bezeichnen wie üblich die entsprechenden Polyeder mit $\bar{K}$ bzw. $\bar{K}'$. Es ist also K bzw. K' eine Simplicialzerlegung des Polyeders $\bar{K}$ bzw. $\bar{K}'$. Mit $\tilde{K}$ bzw. $\tilde{K}'$ bezeichnen wir die universellen Überlagerungskomplexe von K bzw. K' . $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ haben isomorphe Deckbewegungsgruppen $\pi_1(K) \cong \pi_1(K')$. Wir wählen einen festen Isomorphismus zwischen diesen Deckbewegungsgruppen und bezeichnen die einander bei diesem Isomorphismus entsprechenden Elemente der beiden Gruppen mit dem gleichen Buchstaben. Die Kettengruppen $C_i(\tilde{K})$ bzw. $C_i(\tilde{K}')$ von $\tilde{K}$ bzw. $\tilde{K}'$ besitzen bekanntlich die Elemente $x \in \pi_1(K) = \pi_1(K')$ als Operatoren. Diese Operatoren x sind randtreu. Daher besitzen auch die Zyklengruppen, Rändergruppen und Homologiegruppen von $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ sämtlich die Elemente x als Operatoren.

⁴⁾ In [14] wird von MACLANE und WHITEHEAD für den Fall $n = 2$ noch erheblich mehr bewiesen, nämlich der genaue Wertebereich der genannten Invarianten bestimmt.

Unter einer deckbewegungstreuen Kettentransformation von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'$ verstehen wir eine Familie von randtreuen Operatorhomomorphismen k (für jede Dimension einen) der Kettengruppen $C_i(\tilde{K})$ in die Kettengruppen $C_i(\tilde{K}')$, wobei der Operatorhomomorphismus k in der Dimension Null jede (positiv signierte) Ecke von $\tilde{K}$ auf eine (positiv signierte) Ecke von $\tilde{K}'$ (und nicht auf ein Multiplum einer solchen) abbildet. Es muß also gelten

$$kx\mathfrak{x}^i = xk\mathfrak{x}^i; \quad k\partial\mathfrak{x}^i = \partial k\mathfrak{x}^i; \quad k\sigma^0 = \sigma'^0$$

für alle $x \in \pi_1(K) = \pi_1(K')$, alle Ketten $\mathfrak{x}^i \in C_i(\tilde{K})$ und alle Nullsimplexe $\sigma^0 \in \tilde{K}$ mit geeigneten Nullsimplexen $\sigma'^0 \in \tilde{K}'$, wobei ∂ den Randoperator (in $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$) bedeutet. Offenbar induziert jede deckbewegungstreue Kettentransformation Operatorhomomorphismen der Zyklen-, Ränder- und Homologiegruppen von $\tilde{K}$ in die von $\tilde{K}'$.

Zwei deckbewegungstreue Kettentransformationen k_1 und k_2 von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'$ heißen deckbewegungstreu kettenhomotop⁵⁾, wenn es eine Familie von Operatorhomomorphismen D (für jede Dimension einen) der Kettengruppen $C_i(\tilde{K})$ in die Kettengruppen $C_{i+1}(\tilde{K}')$ gibt, derart, daß für jede Kette $\mathfrak{x}^i \in C_i(\tilde{K})$

$$\partial D\mathfrak{x}^i = k_1\mathfrak{x}^i - k_2\mathfrak{x}^i - D\partial\mathfrak{x}^i$$

gilt (für $i = 0$ ist das letzte Glied auf der rechten Seite gleich Null zu setzen). Wir schreiben dann zur Abkürzung: $k_1 \simeq k_2$. Dieser Begriff der Kettenhomotopie ist offenbar das kombinatorische Analogon zum gewöhnlichen Homotopiebegriff.

Jede Kettentransformation $k: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ definiert auch für jedes q für das q -dimensionale Gerüst $\tilde{K}^q$ von $\tilde{K}$ eine Kettentransformation $k|_{\tilde{K}^q}: \tilde{K}^q \rightarrow \tilde{K}'^q$. Sind die Kettentransformationen $k_1|_{\tilde{K}^q}$ und $k_2|_{\tilde{K}^q}$ kettenhomotop, $k_1|_{\tilde{K}^q} \simeq k_2|_{\tilde{K}^q}$, so sagen wir, daß k_1 und k_2 in den Dimensionen $\leq q$ kettenhomotop sind, und schreiben: $k_1 \simeq k_2$ ($\dim \leq q$). Das bedeutet offenbar, daß die Homotopieoperatoren D nur bis zur Dimension $i = q$ einschließlich definiert sind.

Unter der weiteren Voraussetzung, daß die zweite bis $(n-1)$ -te Homotopiegruppe von K' verschwindet,

$$\pi_i(K') = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

gibt es, wie man durch eine induktive Konstruktion leicht einsieht, eine deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^n \rightarrow \tilde{K}'^n$ des n -dimensionalen Gerüsts $\tilde{K}^n$ der universellen Überlagerung $\tilde{K}$ von K in $\tilde{K}'^n$. Der Fortsetzung dieser Kettentransformation k über die Dimension n hinaus stellt sich jedoch ein Hindernis entgegen, das durch die „Obstruktion“

$$\eta k \partial \sigma^{n+1} \in H_n(\tilde{K}')$$

⁵⁾ Im folgenden werden wir auf den universellen Überlagerungen immer nur deckbewegungstreue Kettentransformationen und Kettenhomotopien betrachten und lassen daher das Adjektiv „deckbewegungstreu“ gelegentlich fort.

⁶⁾ $k|_{\tilde{K}^q}$ bedeutet die Kettentransformation k , nur auf dem q -dimensionalen Gerüst $\tilde{K}^q$ betrachtet. Dieselbe Bezeichnungsweise verwenden wir auch im folgenden Fall: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung eines Raumes X in einen Raum Y und sei $A \subset X$ ein Unterraum von X . Dann bedeutet $f|_A$ die Abbildung f , nur auf dem Unterraum A betrachtet, also $f|_A: A \rightarrow Y$.

gemessen wird. Hierbei bedeutet σ^{n+1} ein beliebiges $(n+1)$ -Simplex von $\tilde{K}$, η den natürlichen Homomorphismus der Zyklengruppe auf die Homologiegruppe $H_n(\tilde{K}')$. Faßt man diese Obstruktion als $(n+1)$ -Kokette von $\tilde{K}$ mit Koeffizienten in $H_n(\tilde{K}')$ auf, indem man das Element $\eta k \partial \sigma^{n+1} \in H_n(\tilde{K}')$ als Funktionswert $f(\sigma^{n+1})$ auf dem Simplex σ^{n+1} ansieht, so ist diese Obstruktion ein deckbewegungstreuer Kozyklus. Dabei heißt eine Kokette f deckbewegungstreu, wenn

$$f(x\sigma^{n+1}) = x f(\sigma^{n+1})$$

gilt für alle Simplexe $\sigma^{n+1} \in \tilde{K}$ und alle Elemente $x \in \pi_1(K) = \pi_1(K')$. Der Korand einer deckbewegungstreuen Kokette ist selbst deckbewegungstreu, und daher kann man mittels der deckbewegungstreuen Koketten Kohomologiegruppen $H_e^{n+1}(\tilde{K}, G)$ ⁷⁾ bilden. Die Kohomologieklassse der Obstruktion von k , also das Element von $H_e^{n+1}(\tilde{K}, H_n(\tilde{K}'))$, das sie bestimmt, hängt nun gar nicht von der speziellen Kettentransformation k ab, sondern nur von den Komplexen $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$, immer vorausgesetzt, daß die Homotopiegruppen $\pi_i(K')$ d. h. die Homologiegruppen $H_i(\tilde{K}') = 0$ sind für $2 \leq i \leq n-1$.

Durchlaufe nun K' alle Komplexe mit einer festen Fundamentalgruppe $\pi_1(K') = \pi_1$ und verschwindenden Homotopiegruppen $\pi_i(K')$ für $2 \leq i \leq n-1$. Wir wählen für den Komplex $\tilde{K}$ einen „Standardkomplex“ K_{π_1} mit der Automorphismengruppe π_1 und erhalten dann als Kohomologieklassse der Obstruktion einer beliebigen π_1 -treuen Kettentransformation $k: K_{\pi_1}^n \rightarrow \tilde{K}'^n$ eine nur von $\tilde{K}'$ abhängige „charakteristische Kohomologieklassse“ aus $H_e^{n+1}(K_{\pi_1}, H_n(\tilde{K}'))$. Der von EILENBERG [3] und ECKMANN [1] eingeführte Standardkomplex K_{π_1} ist zwar keine universelle Überlagerung eines Simplicialkomplexes, sondern ein abstrakter Komplex mit der Automorphismengruppe π_1 . Aber für ihn gelten die sämtlichen oben benutzten Tatsachen gleichfalls⁸⁾. Die mittels der deckbewegungstreuen Koketten von K_{π_1} definierten Kohomologiegruppen $H_e^q(K_{\pi_1}, G)$ des Komplexes K_{π_1} über der Koeffizientengruppe G , auf welche π_1 als Gruppe von Operatoren wirkt, sind die von EILENBERG-MACLANE früher [6] eingeführten Kohomologiegruppen $H^q(\pi_1, G)$ der Gruppe π_1 . Die charakteristische Kohomologieklassse des Komplexes $\tilde{K}'$ ist also ein Element $l_{\tilde{K}'}^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1(K'), H_n(\tilde{K}'))$.

Beachten wir, daß nach dem HUREWICZschen Äquivalenzsatz die n -te Homologiegruppe $H_n(\tilde{K}')$ der Überlagerung $\tilde{K}'$ isomorph ist zur n -ten Homotopiegruppe $\pi_n(K')$ des Grundkomplexes K' , so können wir die charakteristische Kohomologieklassse auch auffassen als Element der $(n+1)$ -ten Kohomologiegruppe der Gruppe $\pi_1(K')$ über der Koeffizientengruppe $\pi_n(K')$. Wir nennen sie dann die EILENBERG-MACLANESche Invariante des Polyeders $\tilde{K}'$ ⁹⁾

$$k_{\tilde{K}'}^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1(\tilde{K}'), \pi_n(\tilde{K}')).$$

⁷⁾ Sie heißen bei EILENBERG [3] equivariant cohomology groups und sind isomorph mit den Kohomologiegruppen von K über geeigneten lokalen Koeffizientengruppen im Sinne von STEENROD [17]. G bezeichnet allgemein die Koeffizientengruppe, die also hier die Elemente der Gruppe $\pi_1(K)$ als Operatoren besitzen muß. In unserem Falle ist $G = H_n(\tilde{K}')$.

⁸⁾ Vgl. im einzelnen [3] und [7].

⁹⁾ das also in den Dimensionen $2, 3, \dots, n-1$ asphärisch ist.

Sie ist nämlich, wie in [7] bewiesen wird ([7], S. 66/67), eine topologische Invariante des Polyeders $\bar{K}'$. Sie ist sogar eine Invariante des Homotopietyps des Polyeders $\bar{K}'$, wie man aus einer modifizierten Definition in [7], S. 84 leicht erkennt.

Unsere weiteren Überlegungen schließen nun an den folgenden Satz der Arbeit [7] von EILENBERG-MACLANE an:

Satz von EILENBERG-MACLANE. Seien $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ zwei universelle Überlagerungskomplexe mit gleicher Deckbewegungsgruppe $\pi_1^{(10)}$, die in den Dimensionen $1, 2, \dots, n-1$ azyklisch sind, $H_i(\tilde{K}) = H_i(\tilde{K}') = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$, und gleiche n -te Homologiegruppen $H_n = H_n(\tilde{K}) = H_n(\tilde{K}')^{(10)}$ sowie gleiche charakteristische Kohomologieklassen $l^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1, H_n)$ haben. Dann gibt es deckbewegungstreue Kettentransformationen

$$k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1} \text{ und } k': \tilde{K}'^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1},$$

die beide in der gemeinsamen Homologiegruppe H_n die Identität induzieren und für die die zusammengesetzten Kettentransformationen $k'k$ und kk' beide zur Identität deckbewegungstreu kettenhomotop sind in den Dimensionen $\leq n$,

$$k'k \simeq 1 \text{ (dim } \leq n); \quad kk' \simeq 1 \text{ (dim } \leq n).$$

Dieser Satz von EILENBERG-MACLANE soll nun im folgenden auf die Untersuchung der Homotopietypen derjenigen Polyeder angewendet werden, bei denen außer π_1 und π_n alle Homotopiegruppen verschwinden.

§ 2. Realisierung der Kettentransformationen.

Seien K und K' zwei Komplexe, $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ die zugehörigen Polyeder. Sie seien zusammenhängend und in den Dimensionen $\neq 1, n$ asphärisch, d. h. die Homotopiegruppen $\pi_i(K)$ und $\pi_i(K')$ für $i \neq 1, n$ verschwinden. Ferner seien ihre Fundamentalgruppen und ihre n -ten Homotopiegruppen isomorph,

$$(1) \quad \pi_1(K) \cong \pi_1(K'); \quad \pi_n(K) \cong \pi_n(K').$$

Wir beziehen die Fundamental- und Homotopiegruppen in K und K' auf feste Anfangspunkte und wählen ein für alle mal einen festen Isomorphismus zwischen ihnen aus. Vermöge dieses Isomorphismus seien die EILENBERG-MACLANESchen Invarianten $k_{\bar{K}}^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1(\bar{K}), \pi_n(\bar{K}))$ und $k_{\bar{K}'}^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1(\bar{K}'), \pi_n(\bar{K}'))$ von $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ einander gleich.

Seien $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ die universellen Überlagerungen von K und K' . Dann sind $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ zusammenhängend und azyklisch in den Dimensionen $1, 2, \dots, n-1$, haben gleiche Deckbewegungsgruppen $\pi_1 = \pi_1(K) = \pi_1(K')$, gleiche n -te Homologiegruppen $H_n = \pi_n(K) = \pi_n(K')$ und gleiche charakteristische Kohomologieklassen $l^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1, H_n)$. Dann gibt es also nach EILENBERG-MACLANE eine deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ des $(n+1)$ -dimensionalen Gerüsts von $\tilde{K}$ in das von $\tilde{K}'$ sowie eine deck-

¹⁰⁾ Die Deckbewegungsgruppen und n -ten Homologiegruppen von $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ sind also mittels eines bestimmten Isomorphismus identifiziert, und im Sinne dieses selben Isomorphismus sind die charakteristischen Kohomologieklassen einander gleich.

bewegungstreue Kettentransformation $k' : \tilde{K}'^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1}$, derart, daß die beiden zusammengesetzten Kettentransformationen

$$k'k : \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1} \text{ und } kk' : \tilde{K}'^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$$

in den Dimensionen $\leq n$ zur Identität kettenhomotop sind. Im folgenden wollen wir nun diese Kettentransformationen und -homotopien durch simpliziale Abbildungen und Homotopien realisieren.

Betrachten wir zunächst die Kettentransformation k und beginnen mit dem nulldimensionalen Gerüst $\tilde{K}^0$. k ordnet definitionsgemäß jeder (positiv signierten) Ecke von $\tilde{K}$ eine (positiv signierte) Ecke von $\tilde{K}'$ zu, wobei für alle Ecken σ^0 von $\tilde{K}$ und alle Deckbewegungen $x \in \pi_1(K) = \pi_1(K')$

$$k(x\sigma^0) = xk(\sigma^0)$$

ist. Daher liefert die Kettentransformation k unmittelbar eine deckbewegungstreue Abbildung Φ des nulldimensionalen Gerüsts $\tilde{K}^0$ von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'$, nämlich

$$(2) \quad \Phi(\sigma^0) = k(\sigma^0)$$

für alle Ecken σ^0 von $\tilde{K}^0$.

Gehen wir zum eindimensionalen Gerüst $\tilde{K}^1$ über. Sei σ^1 eine festgewählte orientierte Strecke aus $\tilde{K}$ mit dem Rand $\partial\sigma^1 = p_1 - p_0$. Durch die Kettentransformation k ist dann die eindimensionale Kette $k(\sigma^1)$ in $\tilde{K}'$ definiert. Wegen der Randtreue von k ist

$$\partial k(\sigma^1) = kp_1 - kp_0.$$

Eine eindimensionale Kette eines Komplexes mit dem Rand $b - a$ ist aber immer von folgender Art: Sie besteht aus einer (endlichen) Anzahl von geschlossenen Kantenwegen des Komplexes und einem Kantenweg, der von a nach b führt¹¹⁾. Das sieht man z. B. durch Induktion nach der Streckenzahl der Kette sofort ein. Bestehe also die Kette $k(\sigma^1)$ von $\tilde{K}'$ aus den geschlossenen Kantenwegen $w'_1, w'_2, \dots, w'_\nu$ und dem Weg $w'_{\nu+1}$ von kp_0 nach kp_1 . Wir wählen auf jedem der Wege w'_i ($i = 1, 2, \dots, \nu$) beliebig eine Ecke p'_i und verbinden kp_0 mit p'_i durch einen beliebigen Kantenweg h_i . Dann betrachten wir den Kantenweg $w' = h'_1 w'_1 h'^{-1}_1 \dots h'_\nu w'_\nu h'^{-1}_\nu w'_{\nu+1}$. Er führt von kp_0 nach kp_1 und liefert, wenn man ihn als eindimensionale Kette auffaßt, die Kette $k\sigma^1$. Nun unterteilen wir σ^1 in so viele Strecken, wie der Weg w' durchläuft, und bilden die Teilstrecken von σ^1 linear auf die von w' ab. Die so erhaltene Abbildung Φ von σ^1 in $\tilde{K}'$ stimmt dann jedenfalls auf den Endpunkten von σ^1 mit der dort bereits definierten Abbildung Φ überein.

Die Auswahl der Hilfswege h_i ist dabei ganz beliebig. Hierin liegt einer der Vorzüge der Benutzung der universellen Überlagerung und der Überlagerungsabbildung. Man hätte an sich ja auch von der Kettenabbildung der Grundkomplexe ausgehen können und dort die obige Konstruktion ausführen können. Dann müßte jedoch die Auswahl der Hilfswege jedenfalls so getroffen werden, daß bei der Abbildung ein geschlossener nullhomotoper Weg in einen nullhomotopen Weg übergeht, damit eine Fortsetzung der Abbildung in höhere Dimensionen möglich ist. Die Frage nach der Möglichkeit einer solchen Auswahl der Hilfswege umgeht man am einfachsten durch Übergang zur universellen Überlagerung.

¹¹⁾ Wenn $b = a$ ist, so ist auch der letzte Kantenweg geschlossen.

Wir haben also jetzt die Abbildung Φ für unsere festgewählte Strecke σ^1 von $\tilde{K}$ definiert. Man hat nun noch darauf zu achten, daß die Gesamtabbildung Φ deckbewegungstreu wird. Man darf also nicht die obige Konstruktion von Φ für alle 1-Simplexe von $\tilde{K}$ unabhängig voneinander durchführen, sondern muß immer die übereinanderliegenden Simplexe zusammen betrachten. Das macht aber keine Schwierigkeit. Für die Strecke $x\sigma^1$, wo x eine beliebige Deckbewegung von $\tilde{K}$ bedeutet, wird nämlich $\partial x\sigma^1 = xp_1 - xp_0$ und $k(x\sigma^1) = xk\sigma^1$. Dann besteht aber $k(x\sigma^1)$ aus den geschlossenen Wegen $xw'_1, xw'_2, \dots, xw'_s$ und dem Weg xw'_{s+1} von xkp_0 nach xkp_1 , und man kann die Hilfswege für $k(x\sigma^1)$ als die x -Bilder der Hilfswege h'_i von $k(\sigma^1)$ wählen, wodurch dann

$$(3) \quad \Phi | x\sigma^1 = x\Phi | \sigma^1$$

wird. Auf diese Weise ist also die Abbildung Φ als deckbewegungstreue Abbildung des Gerüsts $\tilde{K}^1$ in $\tilde{K}'$ definiert. Sie ist in einer gewissen Unterteilung des eindimensionalen Gerüsts $\tilde{K}^1$ simplizial. Sei u die zugehörige Unterteilungstransformation, die jedem Einssimplex aus $\tilde{K}$ die Grundkette dieses Simplexes in der Unterteilung zuordnet. Dann hat die Abbildung Φ die Eigenschaft

$$(4) \quad \Phi u\sigma^1 = k\sigma^1 \quad (12)$$

für alle $\sigma^1 \in \tilde{K}$. In diesem Sinne realisiert also die Abbildung Φ die Ketten-transformation k .

Um die k realisierende Abbildung Φ auf die höherdimensionalen Gerüste von $\tilde{K}$ fortzusetzen, ziehen wir nun den von HOPF geschaffenen Begriff des Homotopierandes heran¹³⁾. Er ist folgendermaßen erklärt: σ_0^{i+1} ($i \geq 1$) sei ein orientiertes $(i+1)$ -dimensionales Element (d. h. topologisches Bild eines Simplexes), S^i seine Randsphäre, auf der ein Pol a ausgezeichnet sei. Wir betrachten alle simplizialen Abbildungen aller Simplizialzerlegungen von σ_0^{i+1} in einen beliebigen Komplex $\mathfrak{K}$, bei denen a in einen festen Punkt 0 von $\mathfrak{K}$ abgebildet wird. Sei f eine solche Abbildung. Wir wählen 0 als Basispunkt für die Homotopiegruppe $\pi_i(\mathfrak{K})$. Das Bild der $(i+1)$ -dimensionalen Grundkette von σ_0^{i+1} ist eine $(i+1)$ -dimensionale Kette τ^{i+1} von $\mathfrak{K}$. Ferner bestimmt $f|S^i$ ein Element α der Homotopiegruppe $\pi_i(\mathfrak{K})$. α heißt „ein Homotopierand“ von τ^{i+1} .¹⁴⁾

Über diesen Homotopierand brauchen wir die folgenden Sätze (vgl. HOPF [9] und [11]):

(a) Sei f wie oben eine Abbildung, die den Homotopierand $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{K})$ von τ^{i+1} bestimmt. Sei g eine weitere simpliziale Abbildung einer Simplizial-

¹²⁾ Wir bezeichnen also hier (und im folgenden) die von der stetigen Abbildung $\Phi: \tilde{K}^1 \rightarrow \tilde{K}'^1$ erzeugte Kettentransformation von $\tilde{K}^1$ in $\tilde{K}'^1$ ebenfalls mit Φ . Mißverständnisse sind hierbei nicht zu befürchten.

¹³⁾ Vgl. HOPF [9] für den Fall $i = 1$, [11] für allgemeines i . In [9] wird unterschieden zwischen simplizialem und stetigem Homotopierand. Die Sätze werden in [9] für den stetigen Homotopierand (für $i = 1$) bewiesen, in [11] für den simplizialen Homotopierand (und allgemeines i) formuliert. Wir verwenden durchgehend den simplizialen Homotopierand, was einige kleine Modifikationen in den Beweisen verlangt. Vgl. z. B. den obigen Beweis von Satz (a) und den von HOPF in [11] angeführten Beweis [9] Nr. 8, b.

¹⁴⁾ Dies ist die Definition aus [11]. In [9] wurde nicht α sondern die stetige Sphäre $f|S^i$ als Homotopierand von τ^{i+1} bezeichnet. Vgl. hierzu Satz (a). Außerdem entspricht die Definition aus [11] besser der Stellung des Begriffes des Homotopierandes innerhalb der relativen Homotopietheorie (vgl. hierzu die Bemerkungen in § 4).

zerlegung der Sphäre S^i in $\mathfrak{K}$ mit $g(a) = 0$. Bestimme $g|S^i$ ebenfalls das Element $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{K}^i)$. Dann läßt sich g zu einer simplizialen Abbildung einer gewissen Simplizialzerlegung von σ_0^{i+1} derart fortsetzen, daß das g -Bild der Grundkette von σ_0^{i+1} wieder $\mathfrak{K}^{i+1}$ ist.

(b) Jede Kette $\mathfrak{K}^{i+1}$ von $\mathfrak{K}$ besitzt Homotopieränder.

(c) Sei $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{K}^i)$ ein Homotopierand von $\mathfrak{K}^{i+1}$. Sei $\mathfrak{R}$ der Normalteiler von $\pi_i(\mathfrak{K}^i)$, der aus allen in $\mathfrak{K}^{i+1}$ nullhomotopen Elementen von $\pi_i(\mathfrak{K}^i)$ besteht. Natürlich ist α aus $\mathfrak{R}$. Sei $\mathfrak{R}_0$ die Untergruppe von $\mathfrak{R}$, die von allen Elementen $\varrho - x\varrho$ ($\varrho \in \mathfrak{R}$, $x \in \pi_1(\mathfrak{K}^i)$) erzeugt wird, wobei das Produkt $x\varrho$ im Sinne der Operationsweise der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathfrak{K}^i)$ auf die Homotopiegruppe $\pi_i(\mathfrak{K}^i)$ zu verstehen ist. Dann besteht die Gesamtheit aller Homotopieränder von $\mathfrak{K}^{i+1}$ aus denjenigen Elementen von $\mathfrak{R}$, die sich von α nur um ein Element aus $\mathfrak{R}_0$ unterscheiden.

(d) Sei ν der natürliche Homomorphismus der Homotopiegruppe $\pi_i(\mathfrak{K}^i)$ in die Homologiegruppe $H_i(\mathfrak{K}^i)$ (= Zyklengruppe von $\mathfrak{K}^i$). Dann gilt für jeden Homotopierand α von $\mathfrak{K}^{i+1}$

$$(5) \quad \nu \alpha = \partial \mathfrak{K}^{i+1}.$$

Der Beweis des Satzes (a) stützt sich auf einen einfachen Hilfssatz, der, soweit ich weiß, nirgends explizit ausgesprochen ist. Nämlich

Hilfssatz. Seien $\overline{\mathfrak{K}}$ und $\overline{\mathfrak{L}}$ zwei i -dimensionale Polyeder. Seien f_0 und f_1 zwei simpliziale Abbildungen zweier (eventuell voneinander verschiedener) Simplizialzerlegungen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ in die Simplizialzerlegung $\mathfrak{L}$ von $\overline{\mathfrak{L}}$. Seien f_0 und f_1 zueinander homotop, d. h. es gebe eine stetige Abbildung F des Prismas $\overline{\mathfrak{K}} \times I$ in das Polyeder $\overline{\mathfrak{L}}$ mit $F| \overline{\mathfrak{K}} \times 0 = f_0$ und $F| \overline{\mathfrak{K}} \times 1 = f_1$. Dann gibt es eine simpliziale Zerlegung¹⁵⁾ des Prismas $\overline{\mathfrak{K}} \times I$, die für $\overline{\mathfrak{K}} \times 0$ mit $\mathfrak{K}_0$, für $\overline{\mathfrak{K}} \times 1$ mit $\mathfrak{K}_1$ übereinstimmt, und eine simpliziale Abbildung F_0 dieser Zerlegung des Prismas $\overline{\mathfrak{K}} \times I$ in $\mathfrak{L}$, die auf $\overline{\mathfrak{K}} \times 0$ mit f_0 und auf $\overline{\mathfrak{K}} \times 1$ mit f_1 übereinstimmt.

Zum Beweis dieses Hilfssatzes verfährt man natürlich so, daß man zunächst die Abbildung F simplizial approximiert. Hierzu hat man zuerst das Prisma $\overline{\mathfrak{K}} \times I$ hinreichend fein simplizial zu unterteilen. Diese Unterteilung kann natürlich so eingerichtet werden, daß sie auf $\overline{\mathfrak{K}} \times 0$ eine Unterteilung $\mathfrak{K}'_0$ von $\mathfrak{K}_0$, auf $\overline{\mathfrak{K}} \times 1$ eine Unterteilung $\mathfrak{K}'_1$ von $\mathfrak{K}_1$ ist. Bei der simplizialen Approximation erfahren daher auch die simplizialen Abbildungen $f_0 = F| \overline{\mathfrak{K}} \times 0$ und $f_1 = F| \overline{\mathfrak{K}} \times 1$ simpliziale Approximationen in bezug auf $\mathfrak{K}'_0$, $\mathfrak{L}$ bzw. in bezug auf $\mathfrak{K}'_1$, $\mathfrak{L}$ ¹⁷⁾. Diese simplizialen Approximationen sind einander dann nach Konstruktion „simplizial homotop“ d. h. vermöge einer simplizialen Abbildung des Deformationsprismas. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die simpliziale Abbildung f_0 (und ebenso f_1) zu einer simplizialen Approximation in bezug auf $\mathfrak{K}'_0$, $\mathfrak{L}$ (bzw. $\mathfrak{K}'_1$, $\mathfrak{L}$) „simplizial homotop“ ist. Das ist der Spezialfall des zu beweisenden Hilfssatzes, wenn f_1 eine simpliziale Approximation von f_0 in bezug auf $\mathfrak{K}'_0$, $\mathfrak{L}$ ist.

¹⁵⁾ Wir schreiben hier einheitlich $\pi_i(\mathfrak{K}^i)$ (auch für den eventuell nichtabelschen Fall $i = 1$) additiv. Im Falle $i = 1$ ist das oben benutzte Produkt $x\varrho$ gleich $x + \varrho - x$ und daher $\varrho - x\varrho$ der Kommutator $\varrho + x - \varrho - x$, also $\mathfrak{R}_0$ gleich der gegenseitigen Kommutatorgruppe $[\pi_1(\mathfrak{K}^1), \mathfrak{R}]$.

¹⁶⁾ Sind die beiden Zerlegungen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ Unterteilungen der Simplizialzerlegung $\mathfrak{K}$ des Polyeders $\overline{\mathfrak{K}}$, so kann die Zerlegung des Prismas $\overline{\mathfrak{K}} \times I$ auch als Unterteilung der Zellenzerlegung des Prismas in die Zellen $\sigma \times I$ ($\sigma \in \mathfrak{K}$) genommen werden.

¹⁷⁾ Bezeichnungsweise nach ALEXANDROFF-HOPF, S. 318.

Dieser Spezialfall ist für den Fall $i = 1$ im Lehrbuch von SEIFERT-THRELFALL, S. 160/61 ausführlich behandelt, und zwar beim Beweis der Übereinstimmung der (stetigen) Fundamentalgruppe und der (simplicialen) Kantenweggruppe eines Komplexes. Der Beweis läßt sich für $i > 1$ ganz analog — wenn auch etwas weitläufiger — erbringen.

Mittels des Hilfssatzes beweisen wir nun den oben formulierten Satz (a). Sei $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{K}^i)$ ein Homotopierand der Kette $\mathfrak{K}^{i+1}$. D. h. es gibt eine simpliciale Unterteilung des Elementes σ_0^{i+1} und eine simpliciale Abbildung f dieser Unterteilung in den Komplex $\mathfrak{K}$ derart, daß das f -Bild der $(i+1)$ -dimensionalen Grundkette von σ_0^{i+1} gleich der Kette $\mathfrak{K}^{i+1}$ ist und daß die stetige Sphäre $f|S^i$ das Element $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{K}^i)$ repräsentiert. Sei g eine weitere simpliciale Abbildung einer Simplicialzerlegung der Sphäre S^i derart, daß $g|S^i$ dasselbe $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{K}^i)$ repräsentiert. Dann sind die simplicialen Abbildungen $f|S^i$ und $g|S^i$ zueinander in $\mathfrak{K}^i$ homotop¹⁸⁾, also nach dem Hilfssatz „simplicial homotop“. Betrachten wir also die Kugelschale zwischen der Sphäre S^i und einer konzentrischen größeren Sphäre S_1^i , so gibt es eine simpliciale Unterteilung dieser Kugelschale und eine simpliciale Abbildung dieser Unterteilung in $\mathfrak{K}^i$, die auf S^i mit f und auf S_1^i mit g übereinstimmt. Füllt man noch S^i mit σ_0^{i+1} aus, so erhält man insgesamt eine simpliciale Abbildung des Elementes σ_1^{i+1} , das aus σ_0^{i+1} und der Kugelschale besteht und die Randsphäre S_1^i hat, in $\mathfrak{K}^{i+1}$ mit der Randabbildung g . Dabei ist das Bild der Grundkette von σ_1^{i+1} nach wie vor die $(i+1)$ -Kette $\mathfrak{K}^{i+1}$, da die ganze Kugelschale in das i -dimensionale Gerüst $\mathfrak{K}^i$ abgebildet wird. Damit ist Satz (a) bewiesen.

Wegen eines Beweises des Satzes (b) vergleiche man auch die Bemerkungen in § 4.

Von Satz (c) benötigen wir nur die (übrigens leichter zu beweisende) eine Hälfte, welche besagt, daß mit α auch $\alpha + (\varrho - x\varrho)$ Homotopierand von $\mathfrak{K}^{i+1}$ ist. Das kommt im wesentlichen darauf hinaus, daß mit ϱ auch $x\varrho$ Homotopierand derselben Kette ist. Das wurde aber beim Beweis des Satzes (a) schon mitbewiesen (vgl. Fußnote¹⁸⁾ auf S. 272). Ganz abgesehen davon, wird in unseren Anwendungen der Komplex $\mathfrak{K}$ immer universelle Überlagerung eines Komplexes sein und daher für $i \geq 2$ sowieso $\pi_1(\mathfrak{K}^i)$ nur aus dem Eins-element bestehen, so daß in diesen Fällen $\mathfrak{K}_0 = 0$ und die benötigte Hälfte des Satzes ganz trivial wird.

Wegen des Satzes (d) vergleiche man ebenfalls die Bemerkungen in § 4.

Wir kehren nun zu unserem eigentlichen Problem zurück. Wir haben jetzt alle Mittel in der Hand, um die Fortsetzung unserer Abbildung Φ auf die höherdimensionalen Gerüste von $\tilde{K}$ durchzuführen. Sei σ^2 irgendein (orientiertes) 2-Simplex von $\tilde{K}$. Dann ist ihm auf Grund der Kettentransformation k eine 2-Kette $\mathfrak{K}^2 = k(\sigma^2)$ von $\tilde{K}'$ derart zugeordnet, daß $\partial \mathfrak{K}^2 = k(\partial \sigma^2)$ ist. Nach Satz (b) hat die Kette $\mathfrak{K}^2$ einen Homotopierand, d. h. es gibt eine simpliciale Abbildung einer Unterteilung des Simplexes σ_0^2 in $\tilde{K}'$, bei der die Grundkette von σ_0^2 in $\mathfrak{K}^2$ übergeht. Sei $\alpha \in \pi_1(\tilde{K}^{\sim 1})$ irgendein Homotopierand von $\mathfrak{K}^2$. Nach (d) ist der durch α bestimmte eindimensionale Zyklus gleich $\partial \mathfrak{K}^2$,

¹⁸⁾ Sogar unter Festhaltung des Basispunktes, aber das wird beim Beweis nicht benutzt. Der Beweis liefert daher sogar den Satz (a) schon unter der schwächeren Voraussetzung, daß $g|S^i$ nicht das Element α , sondern ein Element $x\alpha \in \pi_i(\mathfrak{K}^i)$ repräsentiert, wobei $x \in \pi_1(\mathfrak{K}^i)$ beliebig ist und das Produkt $x\alpha$ im Sinne der Operationsweise von $\pi_1(\mathfrak{K}^i)$ auf $\pi_i(\mathfrak{K}^i)$ aufzufassen ist.

also gleich $k(\partial \sigma^2)$. Welches ist die Gesamtheit aller Homotopieränder von χ^2 ? Da $\pi_1(\tilde{K}')$ trivial ist, ist $\mathfrak{R} = \pi_1(\tilde{K}'^1)$ und $[\pi_1(\tilde{K}'^1), \mathfrak{R}]$ gleich der Kommutatorgruppe von $\pi_1(\tilde{K}'^1)$. Also sind nach (c) alle diejenigen Elemente von $\pi_1(\tilde{K}'^1)$ Homotopieränder von χ^2 , die sich von α nur um Kommutatoren (und deren Potenzprodukte) unterscheiden, d. h. diejenigen Elemente aus $\pi_1(\tilde{K}'^1)$, die denselben eindimensionalen Zyklus bestimmen wie α , d. h. den eindimensionalen Zyklus $k(\partial \sigma^2)$.

Nach (4) ist nun das Φ -Bild des Randweges von σ^2 ein Weg, der als eindimensionaler Zyklus das Element $k(\partial \sigma^2)$ definiert. Wählt man noch den Basispunkt 0 von vorneherein als Eckpunkt dieses Weges, so sieht man, daß das durch das Φ -Bild des Randweges von σ^2 bestimmte Element von $\pi_1(\tilde{K}'^1)$ ein Homotopierand von $k(\sigma^2)$ ist. Also gibt es nach (a) eine simpliziale Unterteilung von σ_0^2 , bei der die Simplizialzerlegung des Randes isomorph zu derjenigen Zerlegung des Randes von σ^2 ist, die bei der Definition von $\Phi: \partial \sigma^2$ benutzt wurde, und eine simpliziale Abbildung dieser Unterteilung von σ_0^2 in $\tilde{K}'$ derart, daß das Bild der Grundkette von σ_0^2 gleich $\chi^2 = k(\sigma^2)$ ist und daß das Bild des Randweges gleich dem Φ -Bild des simplizialen Randweges von σ^2 ist. Wir identifizieren nun σ_0^2 mit σ^2 in solcher Weise, daß die isomorphen Randzerlegungen zusammenfallen und Randpunkte mit gleichen Φ -Bildern identifiziert werden. Dann erhalten wir eine Unterteilung von σ^2 und eine simpliziale Abbildung Φ dieser Unterteilung in $\tilde{K}'$, wobei die Abbildung Φ auf $\tilde{K}'^1$ mit der bereits dort definierten Abbildung zusammenfällt. Wieder realisiert Φ die Kettentransformation k in dem Sinne, daß

$$(6) \quad \Phi u \sigma^2 = k \sigma^2$$

ist.

Wie im Falle des eindimensionalen Gerüsts sorgen wir nun dafür, daß Φ deckbewegungstreu wird, indem wir nach dem Simplex σ^2 zunächst die Simplexe $x \sigma^2$ betrachten und Φ deckbewegungstreu auf $x \sigma^2$ fortsetzen. Damit ist dann die Abbildung Φ auf das ganze zweidimensionale Gerüst von $\tilde{K}$ deckbewegungstreu fortgesetzt, und es gilt (6) für alle $\sigma^2 \in \tilde{K}$.

Sei nun $2 \leq i \leq n$ und schon eine deckbewegungstreue Abbildung Φ des i -dimensionalen Gerüsts $\tilde{K}^i$ in $\tilde{K}'^i$ definiert, die in einer geeigneten Unterteilung von $\tilde{K}^i$ simplizial ist und der Bedingung

$$(7) \quad \Phi u \sigma^i = k \sigma^i$$

für alle $\sigma^i \in \tilde{K}^i$ genügt, wobei wieder u die Unterteilungstransformation von $\tilde{K}^i$ in die genannte Unterteilung ist. Sei σ^{i+1} ein orientiertes $(i+1)$ -dimensionales Simplex von $\tilde{K}$. Auf Grund der Kettentransformation k entspricht dem Simplex σ^{i+1} eine $(i+1)$ -dimensionale Kette $k \sigma^{i+1} = \chi^{i+1}$ von $\tilde{K}'$. Wir betrachten die Homotopieränder dieser Kette χ^{i+1} . Jedenfalls hat χ^{i+1} nach Satz (b) überhaupt einen Homotopierand $\alpha \in \pi_i(\tilde{K}'^i)$. Ferner entsteht nach Satz (c) die Gesamtheit aller Homotopieränder von χ^{i+1} aus α durch Addition der Elemente von $\mathfrak{R}_0$. In unserem Falle ist aber $\mathfrak{R}_0 = 0$; denn die erzeugenden Elemente $\varrho - x \varrho$ sind alle gleich Null, da die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K}'^i)$ wegen $i \geq 2$ nur aus dem Einselement besteht. Also gibt es in diesem Falle

nur den Homotopierand α von $\tilde{\epsilon}^{i+1}$. Sei ν der natürliche Homomorphismus der Homotopiegruppe $\pi_i(\tilde{K}^i)$ in die Homologiegruppe $H_i(\tilde{K}^i)$. Dann ist nach Satz (d) $\nu \alpha = \partial \tilde{\epsilon}^{i+1}$.

Ebenso ist aber nach Voraussetzung die Abbildung Φ für eine gewisse Unterteilung des Randes $\partial \sigma^{i+1}$ simplizial und nach (7) das Bild des Grundzyklus dieser Unterteilung von $\partial \sigma^{i+1}$ gleich $k \partial \sigma^{i+1} = \partial k \sigma^{i+1} = \partial \tilde{\epsilon}^{i+1}$. Nun ist auf Grund des HUREWICZschen Äquivalenzsatzes wegen $\pi_1(\tilde{K}^i) = \pi_2(\tilde{K}^i) = \dots = \pi_{i-1}(\tilde{K}^i) = 0$ der natürliche Homomorphismus ν ein Isomorphismus von $\pi_i(\tilde{K}^i)$ auf $H_i(\tilde{K}^i)$. Also definiert die Abbildung $\Phi \partial \sigma^{i+1}$ als stetige Sphäre ebenfalls das Element $\alpha \in \pi_i(\tilde{K}^i)$. Dann gibt es aber nach Satz (a) eine Unterteilung von σ^{i+1} , die auf $\partial \sigma^{i+1}$ mit der gegebenen Unterteilung übereinstimmt, und eine simpliziale Abbildung dieser Unterteilung von σ^{i+1} in $\tilde{K}'$, die auf der Randsphäre von σ^{i+1} mit Φ übereinstimmt und als Bild der Grundkette von σ^{i+1} die Kette $k \sigma^{i+1}$ liefert. Durch diese Fortsetzung der Randabbildung Φ definieren wir $\Phi \sigma^{i+1}$. Dies wird für jedes σ^{i+1} durchgeführt und zwar so, daß $\Phi|_{\tilde{K}^{i+1}}$ deckbewegungstreu wird, was deshalb möglich ist, weil $\Phi|_{\tilde{K}^i}$ nach Induktionsvoraussetzung deckbewegungstreu war. Damit erhalten wir eine deckbewegungstreue Abbildung $\Phi: \tilde{K}^{i+1} \rightarrow \tilde{K}^{i+1}$, die in einer gewissen Unterteilung von $\tilde{K}^{i+1}$ simplizial ist und mit der Kettentransformation k gemäß

$$(8) \quad \Phi u \sigma^q = k \sigma^q \quad \sigma^q \in \tilde{K}^{i+1}$$

zusammenhängt, wobei u die Unterteilungstransformation von $\tilde{K}^{i+1}$ in die genannte Unterteilung bedeutet. Auf diese Weise erhalten wir schließlich eine Abbildung Φ des $(n+1)$ -dimensionalen Gerüsts $\tilde{K}^{n+1}$, die die Kettentransformation k in dem angegebenen Sinne realisiert.

Übrigens genügt es für unsere weiteren Betrachtungen, daß die Abbildung Φ die Kettentransformation k nur in den Dimensionen $\leq n$ realisiert, d. h. daß Gleichung (8) nur für $i+1 = n$ gilt. Verzichtet man daher auf die Forderung, daß Φ auch noch in der Dimension $n+1$ die Kettentransformation k realisiert, so kann man den letzten Schritt vom n -dimensionalen auf das $(n+1)$ -dimensionale Gerüst etwas kürzer (und ohne Benutzung des Homotopierandes) folgendermaßen durchführen:

Sei σ^{n+1} ein orientiertes $(n+1)$ -Simplex von $\tilde{K}$. Auf dem Rand von σ^{n+1} ist die Abbildung Φ bereits erklärt. Das Φ -Bild dieses Randes definiert als n -Sphärenbild ein Element der n -ten Homotopiegruppe $\pi_n(\tilde{K}')$ von $\tilde{K}'$. Da die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K}')$ von $\tilde{K}'$ verschwindet, brauchen wir uns hier um Basispunkte nicht zu kümmern. Gemäß der Definition von Φ ist Φ simpliziale Abbildung einer gewissen Unterteilung der Randsphäre von σ^{n+1} und das Φ -Bild des Grundzyklus dieser triangulierten Sphäre ist das Bild $k(\partial \sigma^{n+1})$ des Randes $\partial \sigma^{n+1}$ bei der Kettentransformation k . Die Kettentransformation k ist aber auch auf dem $(n+1)$ -dimensionalen Gerüst erklärt und randtreu, also $k(\partial \sigma^{n+1}) = \partial k \sigma^{n+1}$. Also ist das Φ -Bild der Randsphäre von σ^{n+1} nullhomolog. Auf Grund des HUREWICZschen Äquivalenzsatzes ist aber $\pi_n(\tilde{K}')$ isomorph zur n -ten Homologiegruppe $H_n(\tilde{K}')$. Also ist das Φ -Bild der Randsphäre von σ^{n+1} sogar nullhomotop und daher Φ auf σ^{n+1} fortsetzbar. Offenbar kann man es noch so einrichten, daß Φ deckbewegungstreu wird.

Die weitere Fortsetzung der Abbildung Φ auf $\tilde{K}$ über die Dimension $n + 1$ hinaus geht nun wegen des Verschwindens der höheren Homotopiegruppen von $\tilde{K}'$ unmittelbar nach bekannter Methode vor sich. Sei die Abbildung Φ bis zum i -dimensionalen ($i \geq n + 1$) Gerüst von $\tilde{K}$ bereits deckbewegungstreu definiert. Sei σ^{i+1} ein $(i + 1)$ -Simplex von $\tilde{K}$. Auf der Randsphäre von σ^{i+1} ist Φ definiert und das Φ -Bild dieser i -Sphäre in $\tilde{K}'$ ist nullhomotop, da $\pi_i(\tilde{K}') = 0$ ist wegen $i \geq n + 1$. Also ist Φ auf σ^{i+1} fortsetzbar, und die gesamte Fortsetzung auf $\tilde{K}^{i+1}$ kann offenbar deckbewegungstreu erfolgen, da Φ auf $\tilde{K}^i$ deckbewegungstreu ist.

Damit haben wir den

Satz 1. *Zur Kettentransformation k des Satzes von EILENBERG-MACLANE gibt es eine deckbewegungstreue Abbildung $\Phi: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$, die mit k in folgender Weise zusammenhängt: Es gibt eine Unterteilung des n -dimensionalen Gerüsts $\tilde{K}^n$, in der Φ simplizial ist. Sei u die Unterteilungstransformation, die jedem Simplex von $\tilde{K}^n$ die Grundkette dieses Simplexes in der Unterteilung zuordnet, dann ist für jedes Simplex σ^q von $\tilde{K}^n$*

$$k \sigma^q = \Phi u \sigma^q.$$

§ 3. Realisierung der Kettenhomotopien.

Wir gehen nun über zum eigentlichen Beweis, daß $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ vom gleichen Homotopietyp sind. Wenden wir den Satz 1 auf die Kettentransformation $k': \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1}$ an, so erhalten wir für sie ebenfalls eine deckbewegungstreue realisierende Abbildung $\Phi': \tilde{K}' \rightarrow \tilde{K}$. Wir betrachten die zusammengesetzte Abbildung $\Phi' \Phi: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ und behaupten, daß sie in den Dimensionen $\leq n$ die zusammengesetzte Kettentransformation $k'k$ im selben Sinne realisiert wie Φ die Kettentransformation k bzw. Φ' die Kettentransformation k' . Zunächst ist Φ simplizial in einer gewissen Unterteilung $\tilde{K}_1^n$ von $\tilde{K}^n$. Diese Unterteilung wird noch einmal unterteilt zu $\tilde{K}_2^n$ derart, daß die zusammengesetzte Abbildung $\Phi' \Phi$ in dieser Unterteilung $\tilde{K}_2^n$ simplizial ist. Das ist für diejenigen Simplexe σ_1^p von $\tilde{K}_1^n$, die bei Φ auf ein Simplex σ'^p gleicher Dimension von $\tilde{K}'$ abgebildet werden (also nicht ausarten), leicht zu machen. Φ' ist ja simplizial in einer gewissen Unterteilung $\tilde{K}'_1^n$ von $\tilde{K}'^n$. Die entsprechende Unterteilung von σ'^p wird dann einfach mittels Φ^{-1} in σ_1^p übertragen (Φ ist ja auf σ_1^p umkehrbar eindeutig). Auf diese Weise ist die Unterteilung $\tilde{K}_2^n$ für alle Simplexe σ_1^p erklärt, die bei Φ nicht ausarten. Offenbar schließen diese Unterteilungen, soweit sie erklärt sind, stetig aneinander. Man hat also die Unterteilung $\tilde{K}_2^n$ nur noch auf alle ausartenden Simplexe von $\tilde{K}_1^n$ derart fortzusetzen, daß darin Φ eine simpliziale Abbildung in die Unterteilung $\tilde{K}'_1^n$ definiert. Das läßt sich jedenfalls erreichen. Doch kommt es uns auf die genauere Art dieser Unterteilung in den ausartenden Simplexen gar nicht an; denn wir wollen nur erreichen, daß $\Phi' \Phi$ die Kettentransformation $k'k$ realisiert. Hierbei spielen aber nur die bei Φ nicht ausartenden Simplexe von $\tilde{K}_1^n$ eine Rolle. In der Tat, sei σ^p ein Simplex von $\tilde{K}^n$. Um zu zeigen,

daß die Grundkette von σ^p in der Unterteilung $\tilde{K}_2^n$ durch die Abbildung $\Phi' \Phi$ in die Kette $k' k \sigma^p$ übergeht, brauchen wir in der Grundkette von σ^p in $\tilde{K}_1^n$ nur die bei Φ nicht ausartenden Simplexe zu betrachten. Für die ausartenden artet ja auch die zugehörige Grundkette in $\tilde{K}_2^n$ aus, d. h. ihr entspricht vermöge Φ die Nullkette in $\tilde{K}_1^n$. Den Grundketten in $\tilde{K}_2^n$ der nicht ausartenden Simplexe σ_1 von $\tilde{K}_1^n$ entspricht aber nach Konstruktion gerade die Grundkette in $\tilde{K}_1^n$ des Φ -Bildes von σ_1 in $\tilde{K}^n$. Und dieser Grundkette in $\tilde{K}_1^n$ entspricht vermöge Φ' die Kette $k' (\Phi \sigma_1)$. Also entspricht der Grundkette in $\tilde{K}_2^n$ des Simplexes σ^p vermöge $\Phi' \Phi$ gerade die Kette $k' k \sigma^p$, w. z. b. w.

Nun zeigen wir schließlich, daß $\Phi' \Phi$ zur Identität homotop ist. Es läßt sich nämlich die Kettenhomotopie $k' k \simeq 1$ im gleichen Sinne realisieren wie die Kettentransformationen k und k' . Die Kettenhomotopie

$$k' k \simeq 1 \quad (\dim \leq n)$$

bedeutet: Es gibt deckbewegungstreue Homomorphismen D_i ($i \leq n$) der i -ten Kettengruppe von $\tilde{K}$ in die $(i+1)$ -te Kettengruppe von $\tilde{K}$ mit der Eigenschaft

$$(1) \quad \partial D_i \sigma^i = \sigma^i - k' k \sigma^i - D_{i-1} \partial \sigma^i$$

für jedes Simplex σ^i von $\tilde{K}$, wobei $D_{-1} = 0$ zu setzen ist.

Sei nun σ^0 eine Ecke von $\tilde{K}$. Dann ist $D_0 \sigma^0$ eine 1-Kette mit dem Rand $\sigma^0 - k' k \sigma^0 = \sigma^0 - \Phi' \Phi \sigma^0$. Wir wählen wieder einen Kantenweg in $\tilde{K}$, der σ^0 mit $\Phi' \Phi \sigma^0$ verbindet und als 1-Kette die Kette $D_0 \sigma^0$ bestimmt. Wir bilden das Prisma $\sigma^0 \times I^{(19)}$ über σ^0 auf diesen Kantenweg ab. Wegen $D_0 x \sigma^0 = x D_0 \sigma^0$ können wir es noch so einrichten, daß die Abbildung von $\tilde{K}^0 \times I$ deckbewegungstreu wird. Sei σ^1 ein 1-Simplex von $\tilde{K}$. Dann ist $D_1 \sigma^1$ eine 2-Kette von $\tilde{K}$ mit dem Rand $\sigma^1 - k' k \sigma^1 - D_0 \partial \sigma^1$. Diese 2-Kette besitzt einen Homotopierand, und die Gesamtheit ihrer Homotopieränder besteht aus denjenigen Elementen von $\pi_1(\tilde{K}^1)$, die als 1-Ketten in $\tilde{K}$ die Kette $\sigma^1 - k' k \sigma^1 - D_0 \partial \sigma^1$ bestimmen. Bilden wir nun den Rand von $\sigma^1 \times I$ folgendermaßen in $\tilde{K}$ ab: $\sigma^1 \times 0$ in natürlicher Weise auf σ^1 , $\sigma^1 \times 1$ mittels $\Phi' \Phi$ in $\tilde{K}$, $\partial \sigma^1 \times I$ in der oben für die Prismen $\sigma^0 \times I$ bestimmten Weise in $\tilde{K}$. Dann bestimmt nach Konstruktion dieses Randwegbild gerade die 1-Kette $\sigma^1 - k' k \sigma^1 - D_0 \partial \sigma^1$. Als Element von $\pi_1(\tilde{K}^1)$ bestimmt es also einen Homotopierand von $D_1 \sigma^1$. Man kann daher die Abbildung des Randes von $\sigma^1 \times I$ derart auf das ganze Prisma $\sigma^1 \times I$ fortsetzen, daß sie (in einer gewissen Unterteilung simplizial ist und) als Bild der Grundkette von $\sigma^1 \times I$ die Kette $D_1 \sigma^1$ liefert. Wegen $D_1 x \sigma^1 = x D_1 \sigma^1$ kann man noch erreichen, daß die Abbildung von $\tilde{K}^1 \times I$ deckbewegungstreu wird.

Sei jetzt bereits für $1 \leq i \leq n-1$ eine Abbildung von $\tilde{K}^i \times I$ in $\tilde{K}$ gegeben, die deckbewegungstreu ist, eine Homotopie zwischen der Identität und $\Phi' \Phi|_{\tilde{K}^i}$ definiert, in einer gewissen Unterteilung von $\tilde{K}^i \times I$ simplizial ist und den Homotopieoperator D realisiert in dem bekannten Sinne, daß für jedes Simplex $\sigma^p \in \tilde{K}^i$ durch die Abbildung aus der Grundkette von $\sigma^p \times I$

¹⁹⁾ $\sigma^p \times I$ ist das topologische Produkt des Simplexes σ^p mit der Strecke $I = [0, 1]$ der Zahlengeraden.

in der genannten Unterteilung die Kette $D_p \sigma^p$ des Komplexes $\tilde{K}$ entsteht. Sei $\sigma^{i+1} \in \tilde{K}^{i+1}$. Dann ist wegen $i+1 \leq n$ die $(i+2)$ -dimensionale Kette $D_{i+1} \sigma^{i+1}$ des Komplexes $\tilde{K}$ erklärt. Sei $\alpha \in \pi_{i+1}(\tilde{K}^{i+1})$ ein Homotopierand von $D_{i+1} \sigma^{i+1}$. Wie im vorigen Paragraphen ist dann wegen $i+1 \geq 2$ das Element α der einzige Homotopierand von $D_{i+1} \sigma^{i+1}$ und

$$\nu \alpha = \partial D_{i+1} \sigma^{i+1} = \sigma^{i+1} - k' k \sigma^{i+1} - D_i \partial \sigma^{i+1},$$

wo ν den natürlichen Homomorphismus von $\pi_{i+1}(\tilde{K}^{i+1})$ in die Homologiegruppe $H_{i+1}(\tilde{K}^{i+1})$ bedeutet. Wir definieren nun eine Abbildung des Randes $\partial(\sigma^{i+1} \times I)$ des Prismas $\sigma^{i+1} \times I$ in $\tilde{K}$ in folgender Weise: $\sigma^{i+1} \times 0$ in natürlicher Weise auf σ^{i+1} , $\sigma^{i+1} \times 1$ vermöge der Abbildung $\Phi' \Phi$ in $\tilde{K}$ und $\partial \sigma^{i+1} \times I$ in der nach Induktionsannahme gegebenen Abbildungsweise von $\tilde{K}^i \times I$ in $\tilde{K}$. Dann bestimmt diese Abbildung des Prismenrandes $\partial(\sigma^{i+1} \times I)$ nach Konstruktion und Induktionsannahme die $(i+1)$ -Kette

$$\sigma^{i+1} - k' k \sigma^{i+1} - D_i \partial \sigma^{i+1}$$

von $\tilde{K}$. Wegen $1 \leq i \leq n-1$ ist $\pi_1(\tilde{K}^{i+1}) = \pi_2(\tilde{K}^{i+1}) = \dots = \pi_i(\tilde{K}^{i+1}) = 0$, also der oben genannte natürliche Homomorphismus ν ein Isomorphismus. Daher bestimmt die eben definierte Abbildung des Prismenrandes $\partial(\sigma^{i+1} \times I)$ das Element $\alpha \in \pi_{i+1}(\tilde{K}^{i+1})$. Es gibt also eine Fortsetzung dieser Abbildung auf das ganze Prisma $\sigma^{i+1} \times I$ derart, daß sie (in einer gewissen Unterteilung simplizial ist und) als Bild der Grundkette von $\sigma^{i+1} \times I$ die Kette $D_{i+1} \sigma^{i+1}$ liefert. Offenbar läßt sich auch die Deckbewegungstreue dieser Abbildung erreichen.

Damit ist die Realisierung der Kettenhomotopie $k' k \simeq 1$ ($\dim \leq n$) geleistet. Den letzten Schritt dieser Konstruktion von $\tilde{K}^{n-1} \times I$ auf $\tilde{K}^n \times I$ hätte man auch hier wieder genau wie im vorigen Paragraphen vereinfachen können (ohne Benutzung des Homotopierandes). Die weitere deckbewegungstreue Fortsetzung der Homotopie zwischen der Identität und der Abbildung $\Phi' \Phi$ auf die Dimensionen $\geq n+1$ erfolgt nach bekanntem Schema auf Grund der Voraussetzung, daß die höheren Homotopiegruppen $\pi_{n+1}(\tilde{K}) = \pi_{n+2}(\tilde{K}) = \dots = 0$ sind.

Damit ist also gezeigt, daß die Abbildung $\Phi' \Phi$ von $\tilde{K}$ in sich zur Identität homotop ist, und zwar ist die Homotopie selbst deckbewegungstreu. Ganz ebenso sieht man, daß auch die Abbildung $\Phi \Phi'$ von $\tilde{K}'$ in sich zur Identität homotop ist, wobei die Homotopie ebenfalls deckbewegungstreu ist. Auf Grund der Deckbewegungstreue kann man sowohl die Abbildungen Φ und Φ' als auch die Homotopien in die Grundkomplexe „herunterprojizieren“. Man erhält dann eine Abbildung $\Phi_0: \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ und eine Abbildung $\Phi'_0: \bar{K}' \rightarrow \bar{K}$ derart, daß die Abbildungen $\Phi'_0 \Phi_0: \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ und $\Phi_0 \Phi'_0: \bar{K}' \rightarrow \bar{K}'$ beide zur Identität homotop sind. Also sind die Polyeder $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ vom selben Homotopietyp.

Umgekehrt stimmen für zwei Polyeder vom selben Homotopietyp die Homotopiegruppen und die EILENBERG-MACLANESchen Invarianten überein. Daher haben wir den

Satz 2. Seien $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ zwei Polyeder, deren Homotopiegruppen $\pi_i(\bar{K})$, $\pi_i(\bar{K}')$ für $i \neq 1, n$ verschwinden. Dann sind $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ dann und nur dann vom selben Homotopietyp, wenn ihre Fundamentalgruppen, ihre n -ten Homo-

topiegruppen (als Gruppen mit den Fundamentalgruppenelementen als Operatoren) und ihre EILENBERG-MACLANESchen Invarianten einander gleich sind.

Der letzte Teil des Beweises von Satz 2, nämlich die Zusammensetzung der beiden Abbildungen Φ und Φ' und der Beweis der Homotopie $\Phi'\Phi \simeq 1$ kann abgekürzt werden, wenn man nach der Konstruktion von Φ den folgenden Satz von J. H. C. WHITEHEAD [18] verwendet:

Seien $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\mathfrak{L}}$ zwei Polyeder und $N = \max(\dim \bar{\mathfrak{R}}, \dim \bar{\mathfrak{L}})$. Sei $f: \bar{\mathfrak{R}} \rightarrow \bar{\mathfrak{L}}$ eine stetige Abbildung von $\bar{\mathfrak{R}}$ in $\bar{\mathfrak{L}}$, die für die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{\mathfrak{R}})$ einen Isomorphismus auf die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{\mathfrak{L}})$ und ebenso für die höheren Homotopiegruppen $\pi_i(\bar{\mathfrak{R}})$ für alle $i \leq N$ einen Isomorphismus auf die entsprechenden Homotopiegruppen $\pi_i(\bar{\mathfrak{L}})$ erzeugt, dann besitzt f eine „Homotopieinverse“, d. h. es gibt eine Abbildung $f': \bar{\mathfrak{L}} \rightarrow \bar{\mathfrak{R}}$ von $\bar{\mathfrak{L}}$ in $\bar{\mathfrak{R}}$, so daß $f'f$ und ff' beide zur Identität homotop sind. Dann sind also $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\mathfrak{L}}$ vom gleichen Homotopietyp²⁰⁾.

Um diesen Satz anzuwenden, haben wir also zu untersuchen, welche Homomorphismen von der Abbildung Φ_0 in der Fundamentalgruppe und in den Homotopiegruppen induziert werden. Sei Φ die oben konstruierte Überlagerungsabbildung zu Φ_0 . Welchen Homomorphismus induziert Φ_0 für die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K})$? Sei w_0 irgendein geschlossener Weg von K , der ein gewisses Element $x \in \pi_1(K)$ repräsentiert. Um das Bild $\Phi_0(w_0)$ zu finden, hat man nach Definition von Φ_0 einen beliebigen Überlagerungsweg w von w_0 zu nehmen, ihn vermöge Φ abzubilden und das Bild in K' zu projizieren. Nach Definition der Überlagerung führt der Weg w von einem gewissen Punkt $p \in \tilde{K}$ zum Punkt $x p$. Nach Konstruktion von Φ führt dann das Bild $\Phi(w)$ vom Punkte Φp zum Punkte $x \Phi p$, so daß die Projektion dieses Bildweges in K' ein geschlossener Weg ist, der das Element $x \in \pi_1(K')$ darstellt. Φ_0 vermittelt also gerade denjenigen Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen $\pi_1(K)$ und $\pi_1(K')$, der durch die gleiche Bezeichnung der Elemente angegeben wurde.

Zweitens untersuchen wir den Homomorphismus, den Φ_0 für die n -ten Homotopiegruppen induziert. Zunächst ist die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(K)$ isomorph zur n -ten Homotopiegruppe $\pi_n(\tilde{K})$ und ebenso $\pi_n(K') \cong \pi_n(\tilde{K}')$ und diese Isomorphismen sind bekanntlich derart, daß durch sie der durch die Abbildung Φ_0 induzierte Homomorphismus von $\pi_n(K)$ in $\pi_n(K')$ übergeführt wird in den durch Φ induzierten Homomorphismus von $\pi_n(\tilde{K})$ in $\pi_n(\tilde{K}')$. Ferner ist nach dem HUREWICZschen Äquivalenzsatz der natürliche Homomorphismus von $\pi_n(\tilde{K})$ in $H_n(\tilde{K})$ und der von $\pi_n(\tilde{K}')$ in $H_n(\tilde{K}')$ ein Isomorphismus auf $H_n(\tilde{K})$ bzw. $H_n(\tilde{K}')$. Und auch diese Isomorphismen sind derart, daß durch sie der von Φ induzierte Homomorphismus von $\pi_n(\tilde{K})$ in $\pi_n(\tilde{K}')$ übergeführt wird in den durch Φ induzierten Homomorphismus von $H_n(\tilde{K})$ in $H_n(\tilde{K}')$. Dieser letztere ist aber leicht zu bestimmen. Sei z^n irgendein n -Zyklus von $\tilde{K}$. Sei $u z^n$ seine Unterteilung in $\tilde{K}_1^n$. Dann ist nach Konstruktion $\Phi u z^n = k z^n$. Nach dem Satz von EILENBERG-MACLANE erzeugt aber k einen

²⁰⁾ Natürlich besagt der Satz nicht, daß die Isomorphie aller Homotopiegruppen hinreichend dafür ist, daß zwei Polyeder vom gleichen Homotopietyp sind. Die wesentliche Bedingung ist vielmehr, daß alle diese Isomorphismen gleichzeitig von einer Abbildung induziert werden.

Isomorphismus von $H_n(K)$ auf $H_n(\tilde{K}')$. Also erzeugt auch Φ_0 einen Isomorphismus von $\pi_n(\tilde{K})$ auf $\pi_n(\tilde{K}')$.

Für die Dimensionen $i \neq 1$, n ist wegen $\pi_i(K) = \pi_i(K') = 0$ die Bedingung des Satzes von WHITEHEAD trivialerweise erfüllt. Also besitzt Φ_0 eine Homotopieinverse, d. h. $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ sind vom gleichen Homotopietyp.

§ 4. Bemerkungen.

Wir wollen dem obigen Beweisgang noch kurz den von WHITEHEAD gegenüberstellen. Während bei ersterem die Frage nach der Gesamtheit aller Homotopieränder einer gegebenen i -dimensionalen Kette ausschlaggebend war, wird bei letzterem umgekehrt bei einer gegebenen nullhomotopen Abbildung des Randes eines $(i+1)$ -Simplexes nach der Gesamtheit aller Fortsetzungsmöglichkeiten der Abbildung auf das ganze Simplex gefragt. Hierbei wird die Theorie der relativen Homotopiegruppen $\pi_{i+1}(\tilde{K}^{i+1}, \tilde{K}^i)$ wesentlich herangezogen. Es ergibt sich die Möglichkeit, die Fortsetzung Φ über alle Dimensionen hin so zu wählen, daß für jedes Simplex $\sigma^p \in \tilde{K}^{n+1}$ die Homologie

$$\Phi \sigma^p \sim k \sigma^p \text{ in } \tilde{K}'^p \text{ mod } \tilde{K}'^{p-1}$$

gilt. Diese Homologie tritt hier an Stelle der Gleichung (8) in § 2 und definiert jetzt den Sinn, in dem die Kettentransformation k durch die Abbildung Φ realisiert wird.

Vergleichen wir die beiden Methoden noch etwas eingehender. Dazu betrachten wir die Homotopiefolge des Paares $\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i$, wo $\mathfrak{R}$ irgendein Komplex ist, und die zugehörige Homologiefolge,

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^i) & \rightarrow \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}) & \rightarrow \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) & \xrightarrow{\partial} & \pi_i(\mathfrak{R}^i) \\ \nu \downarrow & \nu \downarrow & \nu \downarrow & & \nu \downarrow \\ \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^i) & \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}) & \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) & \xrightarrow{\partial} & H_i(\mathfrak{R}^i). \end{array}$$

Sie sind durch den natürlichen Homomorphismus ν verbunden. Bei der WHITEHEADSchen Methode geht man von einem festen Element von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ aus und fragt nach allen Elementen von $\pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$, die durch den Randoperator ∂ in das vorgegebene Element von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ übergehen. Diese Frage wird durch die Exaktheit der Homotopiefolge sofort beantwortet. Bei der ersten Methode hingegen geht man von einer bestimmten $(i+1)$ -Kette $\mathfrak{r}^{i+1}$ aus, also von einem Element der Gruppe $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$, und fragt nach allen Homotopierändern dieser Kette. Das bedeutet im Rahmen der Homotopietheorie: Man fragt zunächst nach allen Elementen von $\pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$, die das vorgegebene Element von $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ als natürliches Bild haben, d. h. nach allen Abbildungen eines $(i+1)$ -dimensionalen topologischen Elementes in $\mathfrak{R}^{i+1}$, bei denen der Rand in $\mathfrak{R}^i$ abgebildet wird (und ein bestimmter Randpunkt in einen festen Punkt von $\mathfrak{R}$) und die, als singuläre Zyklen mod $\mathfrak{R}^i$ aufgefaßt, das vorgelegte Element von $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ bestimmen. Bei jeder dieser Abbildungen hat man dann zu der Randabbildung überzugehen, d. h. auf die entsprechenden Elemente der Gruppe $\pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ den Operator ∂ anzuwenden. Die erhaltenen Elemente von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ sind dann die Homotopieränder von $\mathfrak{r}^{i+1}$. Der Übergang zum Homotopierand ist also im Rahmen der relativen Homotopietheorie einfach der Übergang $\partial \nu^{-1}: H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) \rightarrow \pi_i(\mathfrak{R}^i)$.

Die Mehrdeutigkeit des Homotopierandes liegt dabei natürlich daran, daß der natürliche Homomorphismus $\nu: \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ kein Isomorphismus ist. Die HOPFSchen Sätze (b)–(d) § 2 über den Homotopierand lassen sich nun leicht homotopietheoretisch aussprechen:

(b) „Jede Kette hat einen Homotopierand“ bedeutet, daß der natürliche Homomorphismus $\nu: \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ ein Homomorphismus auf die ganze Gruppe $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ ist. Das ist übrigens mit bekannten Argumenten von HUREWICZ sehr leicht zu beweisen (vgl. auch HU [12]): Repräsentiere die Kette τ^{i+1} ein Element der Gruppe $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$. Sei $\tau^{i+1} = \sum m_j \sigma_j^{i+1}$, wo σ_j^{i+1} die $(i+1)$ -Simplexe von $\mathfrak{R}$ durchläuft. Offenbar repräsentiert auch jedes σ_j^{i+1} ein Element von $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$. Andererseits repräsentiert die identische Abbildung von σ_j^{i+1} in $\mathfrak{R}^{i+1}$ (bei geeigneter Wahl des Basispunktes) ein Element ω_j der relativen Homotopiegruppe $\pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$. Natürlich ist $\nu \omega_j = \sigma_j^{i+1}$, wenn ν der natürliche Homomorphismus von $\pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ in $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ ist. Da ν ein Homomorphismus ist, ist dann $\nu \sum m_j \omega_j = \sum m_j \sigma_j^{i+1} = \tau^{i+1}$, w. z. b. w.

Der Satz (c) bestimmt das ∂ -Bild des Kernes des natürlichen Homomorphismus $\nu: \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$, nämlich die Homotopieränder des Nullelementes aus $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$. Das ∂ -Bild dieses Kernes besteht also aus der Untergruppe $\mathfrak{R}_0$ von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$.

Der dritte Satz (d) schließlich drückt aus, daß der natürliche Homomorphismus zwischen Homotopie- und Homologiefolge mit den Randoperatoren ∂ vertauschbar ist. Das ist aber nur ein Spezialfall der bekannten Tatsache, daß der natürliche Homomorphismus zwischen Homotopie- und Homologiefolge mit den Homomorphismen in diesen Folgen vertauschbar ist.

§ 5. Abbildungsklassen.

Während bei den grundlegenden Untersuchungen von HUREWICZ [13] über die Homotopietypen der asphärischen Räume, d. h. solcher Räume X mit $\pi_i(X) = 0$ für $i \geq 2$, zunächst das allgemeinere Problem der Bestimmung aller Abbildungsklassen eines Polyeders Y in den Raum X gelöst wird und damit dann die Frage nach dem Homotopietyp von X beantwortet wird, ist das bei der vorliegenden Arbeit nicht der Fall. Vielmehr wird gleich die Frage nach dem Homotopietyp gestellt. Jedoch kann man immerhin einige ganz interessante Bemerkungen zu der Frage der Abbildungsklassen aus den vorhergehenden Ausführungen entnehmen. Diesen Bemerkungen ist dieser letzte Paragraph gewidmet.

Seien zunächst K und K' irgend zwei zusammenhängende Komplexe, $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ die entsprechenden Polyeder. Wir zeichnen in K bzw. K' je eine Ecke p bzw. p' aus, die als Basispunkte für die Fundamentalgruppen sowie für die Konstruktion der universellen Überlagerungen benutzt werden. Dann vermittelt jede Abbildung $f: \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ einen bis auf einen inneren Automorphismus bestimmten Homomorphismus der Fundamentalgruppe $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ und damit auch der Deckbewegungsgruppen der universellen Überlagerungen von K und K' .

Zu jeder stetigen Abbildung $f: \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ gibt es Überlagerungsabbildungen $\tilde{f}: \tilde{\bar{K}} \rightarrow \tilde{\bar{K}'}$ der universellen Überlagerungspolyeder. $\tilde{f}$ ist bis auf eine zu-

sätzliche Deckbewegung von $\tilde{K}'$ eindeutig bestimmt und ist im folgenden Sinne deckbewegungstreu: Bezeichnen wir einen beliebigen Homomorphismus aus der Homomorphismenklasse, die die Abbildung f von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ induziert, ebenfalls mit f , so gilt für eine geeignete der Überlagerungsabbildungen $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(xq) = f(x)\tilde{f}(q)$$

für alle Punkte $q \in \tilde{K}$ und alle Elemente $x \in \pi_1(K)$. Wir sagen daher, daß eine bestimmte Überlagerungsabbildung im Sinne eines gewissen Homomorphismus von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ deckbewegungstreu ist, bzw. allgemein, daß die Überlagerungsabbildungen einer gegebenen Abbildung f im Sinne der durch f induzierten Homomorphismenklasse von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ deckbewegungstreu sind.

Läßt man die Grundabbildung f durch eine Homotopie in eine andere Abbildung f_1 übergehen, so kann man diese Homotopie auf die Überlagerungsabbildung $\tilde{f}$ übertragen und erhält dort eine (im selben Sinne wie $\tilde{f}$) deckbewegungstreue Homotopie zwischen der Abbildung $\tilde{f}$ und einer gewissen Überlagerungsabbildung von f_1 ²¹⁾.

Also entspricht einer Abbildungsklasse von $\bar{K}$ in $\bar{K}'$ eindeutig eine Klasse von (im Sinne einer gewissen Homomorphismenklasse von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$) deckbewegungstreuen Abbildungen von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'$, die durch deckbewegungstreue Homotopien und anschließende Decktransformationen von $\tilde{K}'$ ineinander übergehen. Eine solche Klasse nennen wir kurz die zur Abbildungsklasse von $\bar{K}$ in $\bar{K}'$ gehörige Überlagerungsklasse.

Umgekehrt entspricht offenbar jeder Überlagerungsklasse eine und nur eine Abbildungsklasse der Grundabbildungen von $\bar{K}$ in $\bar{K}'$. Also ist das Problem der Bestimmung der Abbildungsklassen von $\bar{K}$ in $\bar{K}'$ gleichwertig mit dem Problem der Bestimmung der Überlagerungsklassen von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'$.

Sei $f: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ eine beliebige stetige (im Sinne eines bestimmten Homomorphismus φ von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$) deckbewegungstreue Abbildung des Polyeders $\tilde{K}$ in das Polyeder $\tilde{K}'$. Wir wollen zunächst dieser Abbildung $f: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ eine deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ des $(n+1)$ -Gerüsts $\tilde{K}^{n+1}$ in das $(n+1)$ -Gerüst $\tilde{K}'^{n+1}$ zuordnen. Dies tun wir in natürlicher Weise folgendermaßen: Wir nehmen eine deckbewegungstreue simpliziale Approximation Φ von f in bezug auf $\tilde{K}_1, \tilde{K}'^{22)}$, wobei K_1 eine hinreichend feine Unterteilung von K ist. Sei u die Unterteilungstransformation, die jedem (orientierten) Simplex $\sigma \in \tilde{K}$ die entsprechende Grundkette dieses Simplexes in der Unterteilung $\tilde{K}_1$ zuordnet. Dann setzen wir

$$k \sigma^i = \Phi u \sigma^i \quad (0 \leq i \leq n+1)^{23)}.$$

Offenbar definiert k für jede Dimension $\leq n+1$ einen (im Sinne φ) deckbewegungstreuen Homomorphismus der entsprechenden Kettengruppen von

²¹⁾ Welche der Überlagerungsabbildungen $\tilde{f}_i$ von f_1 hierbei erscheint, hängt von dem Weg des Punktes $f(p)$ bei der Homotopie von f in f_1 ab.

²²⁾ Terminologie wie bei ALEXANDROFF-HOPF, Topologie, S. 318.

²³⁾ Natürlich ist der Grund für diese Beschränkung für die Dimension an dieser Stelle noch nicht ersichtlich, wird aber im folgenden klar werden.

$\tilde{K}^{n+1}$ in die von $\tilde{K}'^{n+1}$. Ferner sind diese Homomorphismen randtreu; denn sowohl u als auch Φ sind randtreu. Also ist k tatsächlich eine Kettentransformation.

k ist natürlich durch f nicht eindeutig bestimmt; denn in der Auswahl der Unterteilung K_1 und der Approximation Φ besteht noch eine große Freiheit. Sei K_2 eine andere Unterteilung von K und Φ_2 simpliziale Approximation von f bezüglich $\tilde{K}_2, \tilde{K}'$. Sei k_2 die durch Φ_2 bestimmte Kettentransformation. Dann sind bekanntlich die beiden Abbildungen Φ und Φ_2 zueinander (im Sinne von φ) deckbewegungstreu homotop, d. h. es gibt eine stetige (im Sinne von φ) deckbewegungstreue Abbildung F des Prismas $\tilde{K} \times I$ in $\tilde{K}'$, die für $\tilde{K} \times 0$ mit Φ , für $\tilde{K} \times 1$ mit Φ_2 übereinstimmt. Dann sind aber nach dem Hilfssatz in § 2 die Abbildungen Φ und Φ_2 simplizial homotop, d. h. F kann als simpliziale (im Sinne von φ) deckbewegungstreue Abbildung einer deckbewegungstreuen Unterteilung des Prismas, die auf $\tilde{K} \times 0$ mit $\tilde{K}_1$, auf $\tilde{K} \times 1$ mit $\tilde{K}_2$ übereinstimmt, genommen werden. Und zwar kann diese Unterteilung des Prismas als eine Unterteilung der Zellenzerlegung von $\tilde{K} \times I$ in die Zellen $\sigma \times I$ ($\sigma \in \tilde{K}$) gewählt werden. Sei u_1 die Unterteilungstransformation der zuletzt genannten Zellenzerlegung des Prismas in die für F benötigte Unterteilung. Dann definieren wir den Homomorphismus D der i -ten Kettengruppe von $\tilde{K}$ in die $(i+1)$ -te Kettengruppe von $\tilde{K}'$ durch

$$D \sigma^i = F u_1 (\sigma^i \times I) \quad (0 \leq i \leq n)^{24}.$$

Diese Homomorphismen D vermitteln eine Kettenhomotopie zwischen k und k_2 ; denn es gilt

$$\begin{aligned} \partial D \sigma^i &= F u_1 \partial (\sigma^i \times I) = F u_1 (\sigma^i \times 0) - F u_1 (\sigma^i \times 1) - F u_1 (\partial \sigma^i \times I) \\ &= k \sigma^i - k_2 \sigma^i - D \partial \sigma^i. \end{aligned}$$

Ferner ist D offenbar (im Sinne von φ) deckbewegungstreu. Also ist durch die obige Vorschrift jeder stetigen (im Sinne von φ) deckbewegungstreuen Abbildung $f: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ eindeutig eine Klasse in den Dimensionen $\leq n$ kettenhomotoper (im Sinne von φ) deckbewegungstreuer Kettentransformationen des $(n+1)$ -Gerüsts $\tilde{K}^{n+1}$ in $\tilde{K}'^{n+1}$ zugeordnet.

Sei f_1 eine weitere Abbildung des Polyeders $\tilde{K}$ in das Polyeder $\tilde{K}'$, die mit f zur selben Überlagerungsklasse gehört. Dann ist auch jede simpliziale Approximation von f_1 nach Ausführung einer geeigneten Decktransformation zu jeder simplizialen Approximation von f (im Sinne von φ) deckbewegungstreu homotop, und daher folgt genau wie oben, daß jede der Abbildung f zugeordnete Kettentransformation k nach Ausführung einer bestimmten Deckbewegung zu jeder der Abbildung f_1 zugeordneten Kettentransformation k_1 in den Dimensionen $\leq n$ deckbewegungstreu kettenhomotop ist. Wir sagen kurz: k und k_1 gehören zur selben Überlagerungsklasse von Kettentransformationen, indem wir zwei im Sinne einer bestimmten Homomorphismenklasse von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ deckbewegungstreue Kettentransformationen k und k_1 von $\tilde{K}^{n+1}$ in $\tilde{K}'^{n+1}$ dann und nur dann zur selben Überlagerungsklasse

²⁴⁾ S. Anm. ²³⁾.

zählen, wenn es ein $x' \in \pi_1(K')$ derart gibt, daß k und $x' k_1$ in den Dimensionen $\leq n$ (im selben Sinne wie k) deckbewegungstreu kettenhomotop sind. Also: f und f_1 ist dieselbe Überlagerungsklasse von Kettentransformationen von $\tilde{K}^{n+1}$ in $\tilde{K}'^{n+1}$ zugeordnet.

Also sind die Abbildungsklassen des Polyeders $\bar{K}$ in das Polyeder $\bar{K}'$ eindeutig bezogen auf eine Untermenge der Überlagerungsklassen der Kettentransformationen des $(n+1)$ -Gerüsts $\tilde{K}^{n+1}$ in das $(n+1)$ -Gerüst $\tilde{K}'^{n+1}$. Dabei kommt es offenbar nach unserer Herleitung gar nicht darauf an, welche Simplicialzerlegungen der Polyeder $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ der Betrachtung zugrundegelegt werden.

Soweit gilt alles ohne weitere Voraussetzung über die Polyeder $\bar{K}$ und $\bar{K}'$. Wir setzen nun weiter voraus, daß alle Homotopiegruppen des Polyeders $\bar{K}'$ außer der ersten und der n -ten verschwinden. Dann kann man den wesentlichen Inhalt der Überlegungen der vorhergehenden Paragraphen dahin zusammenfassen, daß

1. jede (im Sinne eines bestimmten Homomorphismus φ) deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ einer geeigneten (im Sinne desselben φ) deckbewegungstremen stetigen Abbildung von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'$ zugeordnet ist,
2. zwei (im Sinne eines bestimmten Homomorphismus φ) deckbewegungstreue stetige Abbildungen von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'$, deren zugeordnete Kettentransformationen in den Dimensionen $\leq n$ deckbewegungstreu kettenhomotop sind, selbst deckbewegungstreu homotop sind.

In der Tat hat man nur zu bemerken, daß die Überlegungen der vorigen Paragraphen über die Verwirklichung von Kettentransformationen und Kettenhomotopien durch stetige Abbildungen und Homotopien nur die Voraussetzung benutzen, daß im Bildpolyeder $\bar{K}'$ alle Homotopiegruppen außer der ersten und der n -ten verschwinden. Also läßt sich erstens jede deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ durch eine Abbildung $\Phi: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ realisieren derart, daß Φ in einer Unterteilung von $\tilde{K}^{n+1}$ simplicial ist und dort die Kettentransformation k bestimmt. Zweitens läßt sich ebenso eine Kettenhomotopie (in den Dimensionen $\leq n$) zwischen den Kettentransformationen, die zwei Abbildungen von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}'$ zugeordnet sind, realisieren, so daß diese beiden Abbildungen auf dem n -dimensionalen Gerüst homotop sind. Dann sind sie aber auch für das ganze Polyeder homotop; denn wegen des Verschwindens der Homotopiegruppen $\pi_{n+1}(K'), \dots$, läßt sich die Homotopie von der Dimension n auf die Dimension $n+1, \dots$ fortsetzen.

Wir sehen also, daß die oben genannte Zuordnung zwischen den Abbildungsklassen von $\bar{K}$ in $\bar{K}'$ und den Überlagerungsklassen der Kettentransformationen von $\tilde{K}^{n+1}$ in $\tilde{K}'^{n+1}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung mit der Gesamtheit aller Überlagerungsklassen ist. Damit haben wir den

Satz 3. Sei $\bar{K}'$ ein zusammenhängendes Polyeder, dessen sämtliche Homotopiegruppen außer der n -ten und der Fundamentalgruppe verschwinden. Sei $\bar{K}$ ein beliebiges zusammenhängendes Polyeder. Dann stehen die Abbildungsklassen von $\bar{K}$ in $\bar{K}'$ in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu der Gesamtheit der Über-

lagerungsklassen der (in den Dimensionen $\leq n^{25}$) kettenhomotopen) Ketten-transformationen des $(n+1)$ -Gerüsts $\tilde{K}^{n+1}$ in das $(n+1)$ -Gerüst $\tilde{K}^{n+1}$.

Natürlich ist mit dem Satz 3 das Problem der Bestimmung der Abbildungsklassen von $\bar{K}$ in $\bar{K}'$ nicht gelöst. Seine Bedeutung liegt vielmehr darin, daß es zurückgeführt wird auf das algebraisch-kombinatorische Problem der Bestimmung der Überlagerungsklassen der Kettentransformationen von $\tilde{K}^{n+1}$ in $\tilde{K}^{n+1}$. Dies ist tatsächlich ein rein algebraisches Problem. Es erfordert allerdings auch noch die Konstruktion der universellen Überlagerungen, also die explizite Kenntnis der Elemente der Fundamentalgruppen von $\bar{K}$ und $\bar{K}'$. Man beachte noch, daß es nach der ganzen Herleitung nicht darauf ankommt, welche Simplicialzerlegung der Polyeder $\bar{K}$ und $\bar{K}'$ man benutzt²⁶).

Literaturverzeichnis.

- [1] ECKMANN, B.: Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe, *Comment. math. helv.* **18**, 232 (1945/46). — [2] EILENBERG, S.: Cohomology and continuous mappings, *Ann. of Math.* **41**, 231 (1940). — [3] EILENBERG, S.: Homology of spaces with operators I, *Trans. Amer. math. Soc.* **61**, 378 (1947). — [4] EILENBERG, S.: Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups, *Bull. Amer. math. Soc.* **55**, 3 (1949). — [5] EILENBERG, S., a. S. MACLANE: Relations between homology and homotopy groups of spaces, *Ann. of Math.* **46**, 480 (1945). — [6] EILENBERG, S., a. S. MACLANE: Cohomology theory in abstract groups I, *Ann. of Math.* **48**, 51 (1947). — [7] EILENBERG, S., a. S. MACLANE: Homology of spaces with operators II, *Trans. Amer. math. Soc.* **65**, 49 (1949). — [8] FOX, R. H.: Homotopy groups and torus homotopy groups, *Ann. of Math.* **49**, 471 (1948). — [9] HOPF, H.: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, *Comment. math. helv.* **14**, 257 (1941/42) und Nachtrag hierzu, *Comment. math. helv.* **15**, 27 (1942/43). — [10] HOPF, H.: Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, *Comment. math. helv.* **17**, 39 (1944). — [11] HOPF, H.: Beiträge zur Homotopietheorie, *Comment. math. helv.* **17**, 307 (1944/45). — [12] HU, S.-T.: An exposition of the relative homotopy theory, *Duke math. J.* **14**, 991 (1947). — [13] HUREWICZ, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen I, II, III, IV, *Proc. K. Akad. Wetensch. Amsterdam* **38**, 112, 521 (1935), **39**, 117, 215 (1936). — [14] MACLANE, S., a. J. H. C. WHITEHEAD: On the 3-type of a complex, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **36**, 41 (1950). — [15] OLUM, P.: Obstructions to extensions and homotopies, *Ann. of Math.* **52**, 1 (1950). — [16] POSTNIKOV, M. M.: Klassifikation der stetigen Abbildungen eines beliebigen n -dimensionalen Polyeders in einen zusammenhängenden topologischen Raum, der in den Dimensionen zwischen eins und n asphärisch ist, *Doklad. Akad. Nauk. SSSR*, **67**, 427 (1949) (russ.). — [17] STEENROD, N.: Homology with local coefficients, *Ann. of Math.* **44**, 610 (1943). — [18] WHITEHEAD, J. H. C.: On the homotopy-type of ANE's, *Bull. Amer. math. Soc.*, **54**, 1133 (1948). — [19] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I, II, *Bull. Amer. math. Soc.* **55**, 213, 453 (1949).

²⁵ Wir könnten hier ebensogut die Überlagerungsklassen durch die Bedingung $k \cong x' k_1$ ($\dim \leq n+1$) erklären; denn zwei Kettentransformationen, die in den Dimensionen $\leq n$ kettenhomotop sind, sind es auch in der Dimension $n+1$; weil hier $H_{n+1}(\tilde{K}') = 0$ ist. Nach HOPF [11] 3 · 5 ist nämlich für ein in den Dimensionen 1, 2, ..., $n-1$ asphärisches Polyeder jeder $(n+1)$ -Zyklus sphärisch, d. h. der natürliche Homomorphismus der $(n+1)$ Homotopiegruppe in die $(n+1)$ Homologiegruppe ein Homomorphismus auf die ganze Homologiegruppe. Es ist aber in unserem Falle $\pi_i(\tilde{K}') = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$ und $\pi_{n+1}(\tilde{K}') = \pi_{n+1}(K') = 0$.

²⁶ Soeben ist in zwei Arbeiten ebenfalls eine Lösung des Problems der Abbildungsklassen angekündigt worden, nämlich P. OLUM [15] und M. M. POSTNIKOV [16]. Beide Autoren benutzen für die Klassifikation wesentlich die EILENBERG-MACLANESche Invariante.

(Eingegangen am 9. November 1950.)

50/310